

Esercizi di algebra lineare (13 novembre 2018)

Esercizio 1. Considerare l'applicazione lineare $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcolare il rango di L_A ed esibire una base di $\text{Im}(L_A)$.
- (b) Determinare equazioni cartesiane per $\text{Im}(L_A)$.

Esercizio 2. Si consideri, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & t \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}).$$

- (a) Per quali valori di t la matrice $A(t)$ è invertibile?
- (b) Per quei valori di t per i quali la matrice $A(t)$ è invertibile determinare $A(t)^{-1}$.

Esercizio 3. Sia A una matrice $m \times n$ e sia B_0 un *minore* (ossia, una sottomatrice quadrata) invertibile $k \times k$ di A . Infine sia $r \geq k$. Dimostrare che $\text{rg}(A) \geq r$ se e solo se esiste un minore $r \times r$ invertibile B di A contenente il minore B_0 .

Esercizio 4. Siano $f: V \rightarrow W$ e $g: W \rightarrow Z$ applicazioni lineari tra spazi vettoriali sul campo \mathbb{K} , e siano $f^*: W^* \rightarrow V^*$, $g^*: Z^* \rightarrow W^*$ e $(g \circ f)^*: Z^* \rightarrow V^*$ le loro duali. Dimostrare che $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ e dedurre che, se A è una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times r$ a coefficienti in \mathbb{K} , si ha

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

dove A^T indica la trasposta della matrice A .

Esercizio 5. Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali sul campo \mathbb{K} .

- (a) Dimostrare che f è invertibile se e solo se la sua duale $f^*: W^* \rightarrow V^*$ lo è e in tal caso si ha $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
- (b) Dimostrare che una matrice quadrata A è invertibile se e solo se la sua trasposta lo è, e in tal caso vale $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Esercizio 6. Utilizzare il risultato dell'esercizio 5 per dimostrare che $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$, per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Esercizio 7. Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali sul campo \mathbb{K} . Dimostrare che

$$Z(\text{Im}(f^*)) = \ker(f),$$

dove, per ogni sottospazio E di V^* , il sottospazio $Z(E)$ di V è definito come $Z(E) := \{v \in V \mid \psi(v) = 0, \forall \psi \in E\}$.

Esercizio 8. Utilizzare il risultato dell'esercizio 7 per dimostrare che $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$, per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.