Esercizi di algebra lineare (27 novembre 2018)

Esercizio 1. Osservare che nel sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

il minore 2×2 della matrice dei coefficienti corrispondente alle variabili x e y è invertibile. Risolvere il sistema dato con il metodo di Cramer, aggiungendo al sistema l'equazione $z = \lambda$, dove λ è un parametro.

Esercizio 2. Risolvere con il metodo di Cramer il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \end{cases}$$

Esercizio 3. Per quali valori del parametro reale t la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ t^2+1 & t-3 \end{pmatrix}$ è invertibile? Per tali valori determinare $A(t)^{-1}$.

Esercizio 4. Calcolare i seguenti determinanti:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \quad , \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{3})$.

Esercizio 5. Una matrice A si dice *antisimmetrica* se $A^T = -A$. Dimostare che, se 2 è invertibile in $\mathbb{K}$, il determinante di una matrice antisimmetrica di ordine dispari si annulla.

Esercizio 6. Si considerino le seguenti 4 matrici a coefficienti reali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Tra le 6 possibili coppie, dire quali sono formate da matrici simili e quali no (si ricorda che due matrici $n \times n$, A e B, si dicono simili se esiste una matrice P invertibile $n \times n$ tale che $A = PBP^{-1}$, ovvero se A e B rappresentano lo stesso endomorfismo di $\mathbb{K}^n$ rispetto a basi (possibilmente) diverse).

Esercizio 7. Calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e dedurre che per ogni $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono simili. Dimostrare che per $a = 0$ le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *non* sono simili.

Esercizio 8. Dimostrare che la matrice a coefficienti reali

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile, ossia che non è simile ad alcuna matrice diagonale.

Esercizio 9. Considerare la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ seguente

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix}.$$

Trovare basi di $\ker(L_A)$ e $\mathrm{Im}(L_A)$. Determinare gli autovalori e gli autospazi di L_A e dire se sia diagonalizzabile.

Esercizio 10. Siano $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ due matrici diagonalizzabili. Dimostrare che A, B sono simili se e solo A, B hanno il medesimo polinomio caratteristico.