# Esercizi di algebra lineare (16 dicembre 2018)

**Esercizio 1.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x_1e_1 + x_2e_2) := x_1e_2 \qquad \text{per ogni } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Determinare i sottospazi vettoriali $f$-invarianti di $\mathbb{R}^2$.

**Esercizio 2.** Calcolare autovalori, autospazi, polinomio caratteristico e polinomio minimo degli endomorfismi $L_A, L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ indotti dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dire inoltre se $L_A$ e $L_B$ siano diagonalizzabili (o triangolabili). In caso, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza (o triangola) tale endomorfismo.

**Esercizio 3.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{C}$ e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare. Supponiamo che esistano un intero $k \geq 2$ e un $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $f^k = \lambda f$. Dimostrare che $f$ è diagonalizzabile.

**Esercizio 4.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{C}$, sia $f : V \to V$ una applicazione lineare e sia $k \geq 2$ intero.

(a) Supponiamo $f$ invertibile. Dimostrare che $f$ è diagonalizzabile se e solo se $f^k$ è diagonalizzabile.

(b) Esibire una $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non invertibile tale che $L_A$ non sia diagonalizzabile ma $L_{A^2}$ sia diagonalizzabile.

**Esercizio 5.** Siano $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Ricordiamo che $A, B$ sono simili se esiste una matrice invertibile $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $B = QAQ^{-1}$. D'altra parte, $A, B$ possono essere viste come matrici complesse: $A, B$ sono simili come matrici complesse se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ invertibile tale che $B = PAP^{-1}$.

(a) Dimostrare che, se $A$ è simile a $B$ come matrici reali, allora $A$ è simile a $B$ come matrici complesse.

(b) Dimostrare che, se $A$ è simile a $B$ come matrici complesse, allora $A$ è simile a $B$ come matrici reali.
*(Suggerimento: mostrare che, se $B = PAP^{-1}$ con $P = M + iN \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ invertibile e $M = \mathrm{Re}(P), N = \mathrm{Im}(P)$ reali, allora $B = (M + tN)A(M + tN)^{-1}$ per ogni $t \in \mathbb{C}$.)*

**Esercizio 6.** Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^6 = I - f - f^5$. Dire se $f$ sia necessariamente triangolabile o diagonalizzabile nel caso $V = \mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^4, \mathbb{R}^3, \mathbb{C}^n$.