**Tre esercizi svolti di algebra lineare (30/10/2018)**

**Esercizio 1.** Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ sia $U \subset \mathbb{R}^3$ is sottospazio vettoriale generato dai due vettori

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinare equazioni cartesiane per $U$.

**Svolgimento.** *Sia* $(e_1, e_2, e_3)$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^3$. *Per definizione di* $U$, *il vettore* $v$ *di* $\mathbb{R}^3$ *appartiene al sottospazio* $U$ *se e solo se* $v \in \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$, *e quindi se e solo se* $\operatorname{span}\{e_1, e_2, v\} = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$. *In altre parole* $v \in U$ *se e solo se* $v$ *si può eliminare dal sistema di generatori* $\{e_1, e_2, v\}$ *per* $U$. *Posta così, la questione si risolve immediatamente con l'algoritmo di Gauss (anche detto "riduzione a scala"). Scrivendo*

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

*troviamo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \\ 0 & 1 & z-3x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & 1 & z-3x \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 2x-y \\ 0 & 1 & -3x+z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & x \\ 0 & \boxed{1} & 2x-y \\ 0 & 0 & -5x+y+z \end{pmatrix} = A'$$

*Ora la matrice* $A'$ *è ottenuta da* $A$ *per riduzione a scala. Le prime due colonne di* $A'$ *contengono ciascuna un pivot. La terza colonna di* $A'$ *contiene un pivot se e solo se* $-5x + y + z \neq 0$. *Dunque la terza colonna della matrice* $A'$ *è linearmente dipendente dalle due precedenti se e solo se* $-5x + y + z = 0$. *Ma la dipendenza e l'indipendenza lineare delle colonne sono preservate dalle operazioni elementari sulle righe. Dunque la terza colonna della matrice* $A$ *(ossia il vettore* $v$*) appartiene a* $\operatorname{span}(e_1, e_2)$ *se e solo se* $-5x + y + z = 0$.
*Dunque* $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -5z + y + z = 0 \right\}$.

**Esercizio 2.** Sia $L_A \colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{Q}^2$ e di $\mathbb{Q}^3$). Determinare equazioni cartesiane per l'immagine di $L_A$.

**Svolgimento.**
*Ci si riconduce immediatamente allo svolgimento dell'esercizio precedente ricordando che l'immagine di $L_A$ è generata dalle colonne della matrice $A$. Abbiamo:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ -2 & -1 & y \\ 4 & 2 & z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & 0 & x+y \\ 4 & 2 & z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & x \\ 0 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & z-2x \end{pmatrix} = A'$$

*Ora $A'$ è una matrice a scala. La matrice $A'$ ha sicuramente un pivot nella prima colonna e nessun pivot nella seconda (dunque la seconda colonna è linearmente dipendente dalla prima). Inoltre $A'$ avrà un pivot nella terza a meno che non si verifichi che $x+y = z-2x = 0$. Dunque la terza colonna di $A'$ è linearmente dipendente dalla prima colonna di $A$ se e solo se $x+y = z-2x = 0$.*
*Essendo $A'$ ottenuta da $A$ con operazioni elementari sulle righe, ne segue che la seconda colonna di $A$ è sempre linearmente dipendente dalla prima colonna di $A$, e inoltre la terza colonna di $A$ è linearmente dipendente dalla prima colonna di $A$ se e solo se $x+y = z-2x = 0$.*
*Concludiamo che il sistema seguente*

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

*dà le equazioni cartesiane cercate per l'immagine di $L_A$.*

**Esercizio 3.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ siano $U$ e $W$ i sottospazi definiti da

$$U = \mathrm{span}\{u_1, u_2\}, \quad \text{dove} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \mathrm{span}\{w_1, w_2\}, \quad \text{dove} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base del sottospazio $U \cap W$.

**Svolgimento.**
*Un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ appartiene a $U \cap W$ se e solo se appartiene sia al sottospazio generato da $u_1$ ed $u_2$ che a quello generato da $w_1$ ed $w_2$. Dunque se e solo se esistono numeri reali $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\begin{cases} v = a_1 u_1 + a_2 u_2 \\ v = b_1 w_1 + b_2 w_2 \end{cases}$$

*Da qui ricaviamo l'equazione*

$$a_1u_1 + a_2u_2 - b_1w_1 - b_2w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{$\star$}$$

*ossia*

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Risolvere quest'equazione equivale a risolvere il sistema lineare rappresentato in forma matriciale da*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

*Applicando l'algoritmo di Gauss (ed usandolo anche per ridurre i pivots a* $1$ *e per far apparire soltanto* $0$ *anche sopra i pivots) troviamo*

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = M'$$

*Dunque il sistema lineare* $(\star)$ *è equivalente a*

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \\ b_1 + b_2 = 0 \end{cases}.$$

*Assegniamo un parametro* $\lambda \in \mathbb{R}$ *corrispondente alla quarta colonna (senza pivot), cosicché*

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \\ b_1 + b_2 = 0 \\ b_2 = \lambda \end{cases}.$$

*Le soluzioni del sistema* $(\star)$ *sono dunque tutte e sole le quadruple*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*al variare del parametro* $\lambda \in \mathbb{R}$.
*Ne segue che lo spazio delle soluzioni del sistema* $(\star)$ *ha base data per esempio dall'unico vettore* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
*Ora, il vettore* $v = a_1u_1+a_2u_2 = b_1w_1+b_2w_2$ *è quindi del tipo* $v = \lambda(0\cdot u_1+1\cdot u_2)$, *ossia* $v$ *è un multiplo di* $u_2$. *Ne segue che una base di* $U \cap W$ *è data da* $(u_2)$.

*Come riprova, osserviamo che la soluzione del sistema ci dice anche* $u_2 = -w_1+w_2$, *e infatti*

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -w_1 + w_2.$$

*Un altro modo di risolvere questo esercizio è il seguente.*
*Per prima cosa troviamo equazioni cartesiane per* $U$ *e per* $W$ *come negli esercizi precedenti. Si trova subito che*

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x-y-z=0 \right\}, \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x-y-z=0 \right\}.$$

*Un sistema di equazioni cartesiane per* $U \cap W$ *è pertanto il sistema*

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$$

*Risolvendolo troviamo*

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

*per cui una base di* $U \cap W$ *è data ad esempio da* $(v')$ *con*

$$v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

*corrspondente alla scelta* $\lambda = 1$. *Chiaramente ogni scelta di* $\lambda \neq 0$ *va bene. Ad esempio il vettore* $v$ *trovato in precedenza corrisponde alla scelta* $\lambda = -1$.