Geometria differenziale

Indirizzo generale - Anno 2012/2013

Esercizi - Foglio 3

Esercizio 1. Siano X e Z varietà C^∞, sia $Y \subset X$ una sottovarietà C^∞ e sia $\iota : Y \to X$ l'inclusione. Dimostrare che $F : Z \to Y$ è C^∞ se e solo se $\iota \circ F : Z \to X$ è C^∞.

Esercizio 2. Dimostrare che la quadrica

$$X_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = t + z^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

è una sottovarietà se e solo se $t \neq 0$.

Esercizio 3. Sia $X \subsetneq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme chiuso con la seguente proprietà

$$\text{se } p \in X \text{ e } t \in \mathbb{R}, \text{ allora } tp \in X\,.$$

Dimostrare che, se X non è contenuto in alcun iperpiano di $\mathbb{R}^n$, allora X non è una sottovarietà.

Esercizio 4.

(a) Sia $\tilde{V}(k, \mathbb{R}^n)$ l'insieme delle k-uple ordinate di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$. Dire che $\tilde{V}(k, \mathbb{R}^n)$ è connessa e/o compatta. Dimostrare che $\tilde{V}(k, \mathbb{R}^n)$ è una varietà C^∞ e calcolarne la dimensione.

(b) Dimostrare che l'applicazione $GL_n^+(\mathbb{R}) \to \tilde{V}(k, \mathbb{R}^n)$ definita come $g \mapsto (g \cdot e_1, \dots, g \cdot e_k)$ è C^∞ e sommersiva. *[GL^+ vuol dire "matrici a determinante positivo".]*

(c) Sia $V(k, \mathbb{R}^n)$ l'insieme delle k-uple ordinate di vettori ortonormali di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che $V(k, \mathbb{R}^n)$ è una varietà C^∞ (detta *varietà di Stiefel* e calcolarne la dimensione. Dire che $V(k, \mathbb{R}^n)$ è connessa e/o compatta. *[Può essere utile usare il punto (a) e dimostrare che $V(k, \mathbb{R}^n)$ è una sottovarietà di $\tilde{V}(k, \mathbb{R}^n)$.]*

(d) Dimostrare che l'applicazione $GS : \tilde{V}(k, \mathbb{R}^n) \to V(k, \mathbb{R}^n)$ definita come $GS(v_1, \dots, v_k) = (w_1, \dots, w_k)$ è C^∞, dove $w_1, \dots, w_k$ sono ottenuti da $v_1, \dots, v_k$ applicando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. *[Può tornare utile l'esercizio 1.]*

(e) Dimostrare che l'applicazione $SO_n(\mathbb{R}) \to \tilde{V}(k, \mathbb{R}^n)$ definita come $g \mapsto (g \cdot e_1, \dots, g \cdot e_k)$ è C^∞ e sommersiva.

(f) Dire se $\tilde{V}(k, \mathbb{R}^n)$ e $V(k, \mathbb{R}^n)$ sono connesse e/o compatte.

Esercizio 5. Sia $Gr(k, \mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k. Considerare l'azione

$$\begin{aligned} \Phi : \; GL_n(\mathbb{R}) \times Gr(k, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow Gr(k, \mathbb{R}^n) \\ (g, P) &\longmapsto g \cdot P \end{aligned}$$

(a) Dimostrare che Φ è transitiva, ossia che per ogni $P, P' \in Gr(k, \mathbb{R}^n)$ esiste un $g \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $g \cdot P = P'$.

(b) Sia $P_0 \subset \mathbb{R}^n$ il sottospazio generato da $e_1, \dots, e_k$. Muniamo $Gr(k, \mathbb{R}^n)$ della topologia indotta dalla suriezione $GL_n(\mathbb{R}) \to Gr(k, \mathbb{R}^n)$ definita come $g \mapsto g \cdot P_0$. Dimostrare che $Gr(k, \mathbb{R}^n)$ è di Hausdorff e a base numerabile.

(c) Per ogni multi-indice $I = (i_1, \dots, i_k)$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, sia $V_I \subset \mathbb{R}^n$ il sottospazio generato da $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ e sia $\pi_I : \mathbb{R}^n \to V_I$ la proiezione ortogonale. Dimostrare che $\mathcal{U} = \{U_I \,|\, |I| = k\}$ è un ricoprimento aperto di $Gr(k, \mathbb{R}^n)$, dove

$$U_I := \{P \in Gr(k, \mathbb{R}^n) \,|\, \pi_I(P) = V_I\}\,.$$

(d) Dimostrare che l'applicazione

$$\psi_I : Hom(V_I, V_I^{\perp}) \longrightarrow U_I$$

definita come $\psi_I(\alpha) = \{v + \alpha(v) \in \mathbb{R}^n \,|\, v \in V_I\}$ è un omeomorfismo. *[Notare che $Hom(V_I, V_I^{\perp})$ è isomorfo ad uno spazio euclideo e quindi ha una sua topologia naturale.]*

(e) Dimostrare che $\mathcal{A} = \{(U_I, \varphi_I) \,|\, |I| = k\}$ è un atlante C^{∞} per $Gr(k, \mathbb{R}^n)$, dove $\varphi_I := \psi_I^{-1}$. Calcolare la dimensione di $Gr(k, \mathbb{R}^n)$.

(f) Dimostrare che $Gr(k, \mathbb{R}^n)$ è connessa e compatta (e si chiama *varietà grassmanniana*).

(g) Dimostrare che $Gr(k, \mathbb{R}^n)$ e $Gr(n - k, \mathbb{R}^n)$ sono diffeomorfe.