Geometria differenziale

Prova in itinere (17 novembre 2017)

Esercizio 1. Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, considerare il luogo

$$S_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^3 + t\} \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

(a) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il luogo S_t è una superficie non singolare in $\mathbb{R}^3$?

(b) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il luogo S_t è connesso? Per quali è compatto?

Esercizio 2. Sia γ una curva piana regolare, semplice, chiusa, di lunghezza $\ell(\gamma)$, con $\kappa_\gamma > 0$ in ogni suo punto. Per ogni $r > 0$, sia $\beta(t) = \gamma(t) - rN(t)$, dove $N(t)$ è il vettore unitario normale a γ in $\gamma(t)$.

(a) Dimostrare che β è una curva piana regolare, semplice, chiusa.

(b) Calcolare la lunghezza di β in funzione di $\ell(\gamma)$ e r.

(c) Calcolare la curvatura κ_β in funzione di κ_γ e r.

Esercizio 3. Considerare il punto $P = (0, 0, -1)$ e le superfici non singolari

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - 1 = x^2 + y^2,\ z \geq 0\}$$
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$$

in $\mathbb{R}^3$. Per ogni $Q \in D$, sia ℓ_Q l'unica retta passante per P e per Q.

(a) Dimostrare che $f(Q) := S \cap \ell_Q$ definisce un'applicazione $f : D \to S$.

(b) Dimostrare che f è un diffeomorfismo.

(c) Dire se f preserva le aree.