Geometria differenziale

LT in Matematica

Prova scritta - 2 febbraio 2018

Nome e Cognome: ____________________

Numero di matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	9	
4	9	
Totale	34	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: ☐

Esercizio 1. (i) Mostrare che la curva $\beta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$\beta(t) := \left(\frac{1+t^2}{t},\ t+1,\ \frac{1-t}{t} \right)$$

giace su un piano affine Π in $\mathbb{R}^3$. Determinare l'equazione cartesiana di Π.

(ii) Sia $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare in parametro d'arco e supponiamo che $\kappa_\gamma(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a, b)$. Definiamo una nuova curva $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ come

$$\alpha(t) := \frac{d\gamma(t)}{dt}.$$

Mostrare che α è regolare. Se s è un parametro d'arco per α, dimostrare che $\frac{ds}{dt} = \kappa_\gamma$ ed esprimere la curvatura di α in funzione della curvatura κ_γ e della torsione τ_γ di γ.

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare in parametro d'arco s con $\kappa(s) > 0$ per ogni $s \in (a, b)$. Sia inoltre $\sigma(u, v) := \gamma(u) + v \cdot \hat{n}(u)$, dove $\hat{n}(s)$ il vettore unitario normale a γ in $\gamma(s)$.

(i) Dimostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $S := \sigma\Big((a, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon)\Big)$ è una superficie regolare.

(ii) Calcolare la prima forma fondamentale di S nelle coordinate u, v in funzione di curvatura κ_γ e torsione τ_γ di γ.

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia γ una curva contenuta nel piano yz di $\mathbb{R}^3$ e sia S la superficie di rotazione ottenuta ruotando γ attorno all'asse z (supponiamo S non singolare).

(i) Dimostrare che, se S ha tutti punti parabolici ma nessun punto ombelicale, allora S è localmente contenuta in un cilindro oppure in un cono.

(ii) Sia $\lambda > 0$. Considerare il semicono $C_\lambda = \{\lambda^2 z^2 = x^2 + y^2,\ z > 0\}$ di vertice O e sia $\beta : \mathbb{R} \to C_\lambda$ una geodetica completa con velocità costante. Se $f(t)$ è la distanza di $\beta(t)$ da O, dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa. *[Suggerimento: può essere utile tagliare il cono lungo una generatrice e vederlo come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.]*

(iii) Con la stessa notazione di (ii), stimare il numero di autointersezioni della curva β in termini di λ.

Risoluzione:

Esercizio 4. Considerare la superficie $S = \{z^2 = x^2+y^2-1\}$ in $\mathbb{R}^3$ e orientarla in modo che $N_{(1,0,0)} = e_1$.

(i) Calcolare la curvatura normale κ_n e la curvatura geodetica κ_g della curva $S \cap \{z = c\}$ per ogni $c \geq 0$.

(ii) Calcolare prima e seconda forma fondamentale di S e dN in coordinate cilindriche (z, θ).

(iii) Per ogni $t > 0$, calcolare

$$\int_{S_t} K \cdot \omega$$

dove K è la curvatura gaussiana di S, $S_t = S \cap \{z \in [0, t]\}$ e ω è la misura di area su S.

Risoluzione: