Geometria differenziale

LT in Matematica

Prova scritta - 19 febbraio 2018

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	9	
4	9	
Totale	34	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: [ ]

Esercizio 1. Sia $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare liscia, non necessariamente in parametro d'arco. Supponiamo che, per ogni $s, t \in (a,b)$, la lunghezza $\|\gamma(t) - \gamma(s)\|$ del segmento di estremi $\gamma(s)$, $\gamma(t)$ dipenda soltanto dalla quantità $|t - s|$.

(i) Dimostrare che γ è parametrizzata a velocità costante.

(ii) Dimostrare che la curvatura di γ è costante, e quindi γ è una porzione di retta o di circonferenza.

[Suggerimento: considerare le derivate della funzione $f(h) := \|\gamma(s+h) - \gamma(s)\|^2$ in $h = 0$.]

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia $c \in \mathbb{R}$ un parametro e sia S_c il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito come

$$S_c := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z(z+4) = 3xy + c \right\}.$$

(i) Determinare i valori di c per i quali il sottoinsieme S_c è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.

(ii) Determinare i valori di c per i quali il sottoinsieme S_c è connesso.

(iii) Determinare i valori di c per i quali il sottoinsieme S_c è compatto.

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia $r > 0$ e sia $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva in parametro d'arco con curvatura $0 < k_\gamma(s) < 1/r$ per ogni $s \in (a, b)$. Per ogni $s \in (a, b)$ sia Π_s il piano passante per $\gamma(s)$ e ortogonale a $\dot\gamma(s)$ e sia $C_s := \{p \in \Pi_s \mid \|\gamma(s) - p\| = r\}$. Supponiamo

$$C_s \cap C_t = \emptyset \qquad \text{per ogni } s \neq t. \tag{$\star$}$$

Sia $C := \bigcup_{s\in(a,b)} C_s$ il *tubo* attorno a γ di raggio r.

(i) Dimostrare che $\sigma_1 : (a, b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ e $\sigma_2 : (a, b) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$ definite come

$$\sigma_i(s, \theta) := \gamma(s) + r\Big(\cos(\theta)N(s) + \sin(\theta)B(s)\Big)$$

sono carte di un atlante differenziabile del tubo C, dove $\Big(T(s), N(s), B(s)\Big)$ è il riferimento di Frenet di γ nel punto $\gamma(s)$.

(ii) Esprimere la curvatura gaussiana K di C in termini di $r, k_\gamma(s), \theta$.

(iii) Supponiamo ora che γ sia una curva chiusa e che valga ancora $(\star)$.
Calcolare $\int_C K \cdot \omega$, dove ω è la misura di volume del tubo C.

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia $U \subset \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$ un aperto e sia $\sigma : U \to S \subset \mathbb{R}^3$ una carta per la superficie regolare S. Supponiamo che

$$\sigma^*(I_S) = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}, \qquad \sigma^*(I\!I_S) = L(u,v)du^2 + M(u,v)dv^2$$

dove (u,v) sono le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^2$ e $L, M : U \to \mathbb{R}$ sono funzioni.

(i) Dimostrare che $LM = -1/v^4$.

(ii) Usando l'espressione di $\sigma^*(I_S)$, calcolare i simboli di Christoffel $\Gamma^{\bullet}_{uv}$ e $\nabla_{\partial_u}(\partial_v)$.

(iii) Usando le equazioni di compatibilità di Codazzi-Mainardi, dimostrare che M e L non dipendono da u e che $v^5 L \frac{dL}{dv} = 1 - v^4 L^2$.

Risoluzione: