Geometria differenziale

LT in Matematica

Prova scritta - 26 giugno 2018

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Numero di matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	9	
3	9	
4	8	
Totale	34	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: ____

Esercizio 1. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva piana definita come $\gamma(t) = \Big(1 + \cos t,\ \sin t(1 + \cos t)\Big)$.

(i) Dire se γ sia regolare e, in caso contrario, determinare i valori di t in cui non lo è.

(ii) Dire se γ sia periodica e, nel caso, determinarne il periodo.

(iii) Determinare una equazione cartesiana per γ.

(iv) Dire se la curva γ sia convessa.

Risoluzione:

Esercizio 2. Considerare il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito come

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^3 + 3(y^2 + z^2)^2 = 2 \right\}.$$

(i) Dire se S sia una superficie non singolare.

(ii) Dire se S sia connessa e se sia compatta.

(iii) Dire se l'intersezione di S con il luogo $R = \{x^4 = y^3\}$ sia una curva non singolare.

Risoluzione:

Esercizio 3. Considerare la superficie di rotazione $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da $\sigma(t,\theta) := \Big(f(t)\cos\theta,\ f(t)\sin\theta,\ t\Big)$, dove $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$.

(i) Dimostrare che, se S è una superficie minima, allora $f\ddot{f} = 1 + \dot{f}^2$.

(ii) Dimostrare che, per ogni $a \in \mathbb{R}_+$ e $b \in \mathbb{R}$, le superfici $S_{a,b}$ parametrizzate da

$$\sigma_{a,b}(t,\theta) = \Big(\frac{1}{a}\cosh(at+b)\cos\theta,\ \frac{1}{a}\cosh(at+b)\sin\theta,\ t\Big)$$

sono minime.

(iii) Dimostrare che le superfici in (ii) sono le uniche superfici minime di rotazione.

Risoluzione:

Esercizio 4. Considerare la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ di equazione $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ con $a, b > 0$. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$, sia $\gamma_\theta \subset S$ la curva $\gamma_\theta(t) := \Big(at\cos\theta,\ bt\sin\theta,\ t^2\Big)$.

(i) Calcolare prima forma fondamentale di S e la sua curvatura gaussiana K.

(ii) Determinare i valori di θ per cui γ_θ è una geodetica di S.

Risoluzione: