Geometria differenziale

LT in Matematica

Prova scritta - 10 settembre 2018

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	9	
2	9	
3	8	
4	8	
Totale	34	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: ______

Esercizio 1. Sia $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva liscia, semplice e chiusa e sia $P \in \mathbb{R}^2$ un punto non appartenente alla curva. Dimostrare o dare un controesempio.

(i) Se la funzione $S^1 \ni t \mapsto d(P, \gamma(t))$ assume massimo in t_0, allora $|\kappa_\gamma|$ assume massimo locale in $\gamma(t_0)$.

(ii) Se la funzione $S^1 \ni t \mapsto d(P, \gamma(t))$ assume minimo in t_0, allora $|\kappa_\gamma|$ assume massimo locale in $\gamma(t_0)$.

Risoluzione:

Esercizio 2. Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, considerare il sottoinsieme $C_\lambda = X \cap Y_\lambda$ di $\mathbb{R}^3$, dove

$$X := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^3 = 0 \right\}$$
$$Y_\lambda := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3z + y^2 = \lambda \right\}.$$

(i) Per ogni valore di λ, determinare gli eventuali punti singolari di C_λ.

(ii) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme C_λ sia compatto.

(iii) Dire se esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il luogo C_λ sia sconnesso.

Risoluzione:

Esercizio 3. Considerare la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$\sigma(u,v) := \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2,\ v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2,\ u^2 - v^2 \right).$$

(i) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S nella parametrizzazione σ.

(ii) Calcolare in ogni punto di S le curvature principali e le direzioni principali di curvatura.

(iii) Dire se la curva $\gamma : \mathbb{R} \to S \subset \mathbb{R}^3$ definita come $\gamma(t) := \sigma(t,t)$ sia una geodetica in S.

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione liscia a supporto compatto e sia $\Sigma := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\}$ il suo grafico in $\mathbb{R}^3$.

(a) Dire se la curvatura gaussiana K possa assumere soltanto valori strettamente positivi su Σ.

(b) Determinare i possibili valori di $\int_\Sigma K \cdot dA$.

Risoluzione: