Geometria differenziale

Esercizi (29 settembre 2017)

Esercizio 1 (Curvatura in coordinate polari). Sia γ una curva in $\mathbb{R}^2$ in descritta in coordinate polari dall'equazione $r = \rho(\vartheta)$, per ϑ che varia in $[a, b]$.

(a) Mostrare che il parametro d'arco è dato da

$$s(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \sqrt{\rho(\varphi)^2 + \dot{\rho}(\varphi)^2} d\varphi.$$

(b) Dimostrare che la curvatura di γ è data da

$$\kappa_\gamma(\vartheta) = \frac{2\dot{\rho}(\vartheta)^2 - \rho(\vartheta)\ddot{\rho}(\vartheta) + \rho(\vartheta)^2}{[\dot{\rho}(\vartheta)^2 + \rho(\vartheta)^2]^{3/2}}.$$

(c) Calcolare la curvatura κ della *spirale archimedea* definita da $\rho(\vartheta) = a\vartheta$, dove $a > 0$ è una costante.

Esercizio 2 (Spirale logaritmica). Sia $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la *spirale logaritmica* definita in coordinate polari da

$$\begin{cases} r(t) = e^t \\ \vartheta(t) = at. \end{cases}$$

(i) Calcolare la lunghezza di γ nell'intervallo di tempo $(-\infty, t)$.

(ii) Calcolare l'angolo formato da $\beta(t)$ e $\dot{\beta}(t)$.

Esercizio 3 (I segmenti nel piano sono i cammini più brevi). Siano $p, q \in \mathbb{R}^2$ punti distinti. Dimostrare che la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ di minima lunghezza che congiunge p e q è il segmento. *[Suggerimento: può tornare utile la funzione $f(t) = \langle p - q,\ \dot{\gamma}(t)\rangle$.]*

Esercizio 4 (Evoluta di una curva). Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ una curva liscia in parametro d'arco s. Supponiamo $\kappa_\gamma(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$ e sia $C_\gamma(s)$ il centro del cerchio osculatore a γ al tempo s.

(i) Dimostrare che $C_\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ è un'applicazione liscia (detta *evoluta di* γ) e calcolarne la velocità.

(ii) Dimostrare che, se C_γ è regolare al tempo s, il punto $\gamma(s)$ giace sulla retta tangente a C_γ al tempo s e che $\dot{\gamma}(s) \perp \dot{C}_\gamma(s)$.

Esercizio 5 (Cicloide). Sia D il disco chiuso di raggio $R > 0$ e centro $(0, R)$ e sia $P_0 = (R, R) \in \partial D$. Supponiamo che il disco "rotoli" sull'asse x senza strisciare il modo che il suo centro si sposti con velocità 1 in direzione $(1, 0)$ e che il punto P_0 is muova in modo solidale con il disco. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva descritta dal punto P_0 (detta *cicloide*).

(i) Determinare per quali tempi $t \in \mathbb{R}$ la cicloide γ è regolare.

(ii) Calcolare la curvatura $\kappa_\gamma(t)$ della cicloide γ.

(iii) Dimostrare che l'evoluta C_γ di γ è isometrica a γ (a meno di rovesciare l'orientazione temporale).