Geometria differenziale

Esercizi (6 ottobre 2017)

Esercizio 1. Sia $a > 0$ e sia $\gamma : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ la curva piana parametrizzata definita da

$$\gamma(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right).$$

Detta R_t la retta tangente a γ al tempo t passante per $\gamma(t)$, calcolare le equazioni di

$$R_{+\infty} := \lim_{t \to +\infty} R_t, \qquad R_{-1} := \lim_{t \to -1} R_t$$

in forma cartesiana.

Esercizio 2. Fissiamo $L > 0$ e sia $\gamma(t)$ la curva piana non costante, definita per $t \geq 0$, con le proprietà

- l'immagine di γ è contenuta nel quadrante $\{x, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$
- $\gamma(0) = (L, 0)$
- se R_t è la retta tangente a γ al tempo t passante per $\gamma(t)$ e P_t è l'intersezione di R_t con l'asse $\{x = 0\}$, allora la distanza tra $\gamma(t)$ e P_t è costante e uguale a L.

Parametrizzare γ in due modi diversi: usando $t = L - x$, e usando ϑ (dove $\vartheta(t)$ è l'angolo in $[0, \pi]$ che $\overrightarrow{O\gamma(t)}$ forma con $(1, 0)$).

(a) Per ciascuna delle parametrizzazioni, determinare i tempi per cui γ è liscia e regolare.
(b) Calcolare l'evoluta C_γ di γ.

Esercizio 3. Siano $\ell > d > 0$. Considerare una curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ con estremi $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = (d, 0)$, che rappresenti una fune di lunghezza ℓ in equilibrio statico con densità di massa δ per unità di lunghezza e soggetta ad una forza gravitazionale[1] che attragga in direzione $(0, -1)$.

Derivare una parametrizzazione della curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$.
[Suggerimento: sia $t_m \in (0, 1)$ tale che $\gamma_2(t_m) < 0$ è minimo. Per ogni $t \in [0, 1]$, usare l'equazione dell'equilibrio per la porzione di curva compresa fra t e t_m per derivare un'equazione differenziale per γ.]

Esercizio 4. Consideriamo il semipiano superiore $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Un *vettore tangente a* $\mathbb{H}^2$ è una coppia (p, v), dove $p \in \mathbb{H}^2$ e $v \in \mathbb{R}^2$: il fibrato tangente $T\mathbb{H}^2$ è l'unione di tutti i vettori tangenti, ossia $T\mathbb{H}^2 := \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^2$. Dati due vettori tangenti (p, v) e (p, w) nello stesso punto $p \in \mathbb{H}^2$, il loro prodotto scalare $h_p(v, w)$ è definito come

$$h_p(v, w) := \frac{\langle v, w \rangle}{y^2}$$

dove $p = (x, y)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^2$. La *lunghezza iperbolica* di una curva $\gamma : I \to \mathbb{H}^2$ è definita come

$$\ell_h(\gamma) := \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} \, dt$$

dove abbiamo usato la norma $\|v\|_p := \sqrt{h_p(v, v)}$.

(a) Dimostrare che, se α e β sono due curve regolari in $\mathbb{H}^2$ che si incontrano in un punto, allora l'angolo formato si può calcolare indifferentemente usando il prodotto scalare euclideo oppure h_p.
(b) Per ogni $0 < a < b$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, calcolare la lunghezza del cammino $\gamma : [a, b] \to \mathbb{H}^2$ definito da $\gamma(t) = (x_0, t)$.
(c) Siano $0 < a < b$. Dimostrare che il segmento tra $(0, a)$ e $(0, b)$ è la curva più corta (rispetto alla lunghezza iperbolica) che unisca tali punti.
(d*) Porre su $\mathbb{H}^2$ la distanza per cui $d(p, q)$ è l'inf delle lunghezze delle curve con estremi p, q. Dimostrare che d è una distanza ed è completa.

[1] Si denoti con g la costante gravitazionale.