Geometria differenziale

Esercizi (21 ottobre 2017)

Definizione. Sia S una superficie in $\mathbb{R}^3$ di equazione $F(x,y,z)=0$ e sia $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^3$ una curva regolare. L'**ordine di contatto** di $\gamma(t)$ con S in $\gamma(0)$ è definito come $\mathrm{ord}_{t=0}(F\circ\gamma)$, ossia come la massima potenza di t che divide la funzione $(F\circ\gamma)(t)$.

Esercizio 1. Sia $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^3$ una curva liscia in parametro d'arco s e assumiamo $\kappa_\gamma(s)\neq 0$ per ogni s. Denotiamo con $(T(s),N(s),B(s))$ il riferimento di Frenet per γ al tempo s.

(a) Scrivere lo sviluppo di Taylor di $\gamma(s)$ in 0 a meno di $o(s^3)$, in termini di $\kappa_\gamma(0)$, $\tau_\gamma(0)$ e del suo riferimento di Frenet $(T(0),N(0),B(0))$.

(b) Assumiamo $\tau_\gamma(0)\neq 0$. Dimostrare che esiste un'unica sfera S (detta *sfera osculatrice*) passante per $\gamma(0)$ e che ha ordine di contatto con γ in $\gamma(0)$ almeno 3. Determinarne centro e raggio.

(c) Dimostrare che per ogni s esiste un vettore $D(s)\in\mathbb{R}^3$ (detto *vettore di Darboux*) tale che

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}^{\bullet}(s)=\begin{pmatrix} D\times T \\ D\times N \\ D\times B \end{pmatrix}(s)$$

per ogni s. Esprimere tale $D(s)$ in funzione di $\kappa_\gamma(s),\tau_\gamma(s),T(s),N(s),B(s)$ e determinarne la norma $\|D(s)\|$.

Esercizio 2. Sia $\gamma:I\to\mathbb{R}^3$ una curva liscia in parametro d'arco s.

(a) Supponiamo $\kappa_\gamma(s).\tau_\gamma(s)\neq 0$ per ogni s.
Dimostrare che γ giace su una sfera se e solo se vale la relazione

$$\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma}=\left(\frac{\dot\kappa_\gamma}{\tau_\gamma\kappa_\gamma^2}\right)^{\bullet}$$

per ogni $s\in I$.

(b) Supponiamo che γ giaccia su $S^2\subset\mathbb{R}^3$ e sia $G(s)=\langle\gamma(s)\times\dot\gamma(s),\,\ddot\gamma(s)\rangle$ (in questo caso, $G(s)$ è la *curvatura geodetica*). Dimostrare che

$$\kappa_\gamma(s)=\sqrt{1+G(s)^2},\qquad \tau_\gamma(s)=\frac{\dot G(s)}{1+G(s)^2}$$

per ogni s. Dimostrare che γ è una circonferenza se e solo se $G(s)$ è costante.

Esercizio 3. Sia γ una curva regolare in $\mathbb{R}^3$ e supponiamo $\kappa_\gamma(s)>0$ per ogni s.

(a) Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(a-i) Esistono $0\neq v_1\in\mathbb{R}^3$ e $c_3\in\mathbb{R}$ tale che $\langle T(s),\,v_1\rangle=c_1$ per ogni s.

(a-ii) Esiste $0\neq v_2\in\mathbb{R}^3$ tale che $\langle N(s),\,v_2\rangle=0$ per ogni s.

(a-iii) Esistono $0\neq v_3\in\mathbb{R}^3$ e $c_3\in\mathbb{R}$ tale che $\langle B(s),\,v_3\rangle=c_3$ per ogni s.

(a-iv) Il rapporto $\dfrac{\tau_\gamma(s)}{\kappa_\gamma(s)}$ è costante.

(a-v) Per ogni s il vettore di Darboux $D(s)\neq 0$ ed inoltre la funzione $\dfrac{D(s)}{\|D(s)\|}$ è costante (vedi Esercizio 1(c)).

(b) Dimostrare che, se $\kappa_\gamma(s)=\kappa>0$ è constante e $\tau_\gamma(s)=\tau$ è costante, allora γ è un'elica.

Esercizio 4. Consideriamo il semipiano superiore $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Un *vettore tangente a* $\mathbb{H}^2$ è una coppia (p,v), dove $p \in \mathbb{H}^2$ e $v \in \mathbb{R}^2$: il fibrato tangente $T\mathbb{H}^2$ è l'unione di tutti i vettori tangenti, ossia $T\mathbb{H}^2 := \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^2$. Dati due vettori tangenti (p,v) e (p,w) nello stesso punto $p \in \mathbb{H}^2$, il loro prodotto scalare $h_p(v,w)$ è definito come

$$h_p(v,w) := \frac{\langle v, w\rangle}{y^2}$$

dove $p = (x,y)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^2$. La *lunghezza iperbolica* di una curva $\gamma : I \to \mathbb{H}^2$ è definita come

$$\ell_h(\gamma) := \int_I \|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)}\, dt$$

dove abbiamo usato la norma $\|v\|_p := \sqrt{h_p(v,v)}$.

(a) Dimostrare che, se α e β sono due curve regolari in $\mathbb{H}^2$ che si incontrano in un punto, allora l'angolo formato si può calcolare indifferentemente usando il prodotto scalare euclideo oppure h_p.

(b) Per ogni $0 < a < b$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, calcolare la lunghezza del cammino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}^2$ definito da $\gamma(t) = (x_0, t)$.

(c) Siano $0 < a < b$. Dimostrare che il segmento tra $(0,a)$ e $(0,b)$ è la curva più corta (rispetto alla lunghezza iperbolica) che unisca tali punti.

(d*) Porre su $\mathbb{H}^2$ la distanza per cui $d(p,q)$ è l'inf delle lunghezze delle curve con estremi p,q. Dimostrare che d è una distanza ed è completa.