Geometria differenziale

Esercizi (2 novembre 2017)

Esercizio 1. Dire se le seguenti siano superfici non singolari in $\mathbb{R}^3$.

(a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
(c) $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz + z^3 = x^2 - y^2 - 1\}$.

Inoltre, esibire una $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ liscia tale che $F^{-1}(0)$ sia una superficie non singolare (non vuota) in $\mathbb{R}^3$ ma 0 non sia un valore regolare per F.

Esercizio 2. Sia $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ un piano in $\mathbb{R}^3$ e sia $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > v\}$. Dire se l'applicazione $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ definita come $\varphi(u, v) = (u + v,\ u + v,\ uv)$ sia una parametrizzazione regolare del piano H.

Esercizio 3. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$ una superficie non singolare in $\mathbb{R}^3$ e considerare

$$\varphi :\ U = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definita come $\varphi(u_1, u_2) = (u_1 + u_2,\ u_1 - u_2,\ 4u_1u_2)$ e

$$\psi :\ W = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \mid w_1 \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definita come $\psi(w_1, w_2) = (w_1 \cosh(w_2),\ w_1 \sinh(w_2),\ w_1^2)$.
Dimostrare che φ e ψ sono carte per S e determinare la loro immagine.

Esercizio 4. Sia $N = (0, 0, 1) \in S^2$ e sia $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ il piano xy, che identificheremo naturalmente con $\mathbb{R}^2$ tramite l'applicazione $\mathbb{R}^2 \to \Pi$ che manda (x, y) in $(x, y, 0)$. Per ogni $p \in S^2$ with $p \neq N$, sia ℓ_p la retta passante per p e N e sia $\sigma_+(p) := \ell_p \cap \Pi$.

(a) Dimostrare che l'applicazione $\sigma_+ : S^2 \setminus \{N\} \to \Pi \cong \mathbb{R}^2$ (detta *proiezione stereografica*) è un omeomorfismo e calcolare esplicitamente σ_+^{-1}.
(b) Dimostrare che σ_+^{-1} è una parametrizzazione regolare di $S^2 \setminus \{N\}$.
(c) Sia $\sigma_- : S^2 \setminus \{-N\} \to \Pi \cong \mathbb{R}^2$ definita analogamente.
Calcolare esplicitamente il cambio di carta $\sigma_-^{-1}\sigma_+ : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
(d) Dimostrare che l'applicazione antipodale $A : S^2 \to S^2$ definita come $A(p) = -p$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 5. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie non singolare.

(a) Sia $H \subset \mathbb{R}^3$ un piano. Dimostrare che la proiezione ortogonale $\pi : S \to H$ è un'applicazione differenziabile.
(b) Sia $p_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus S$. Dimostrare che l'applicazione $f : S \to \mathbb{R}$ definita come $f(p) := \|p - p_0\|$ è differenziabile.
(c) Sia $f : S \to \mathbb{R}$. Dimostrare che f è differenziabile nel punto $p \in S \iff$ esiste un aperto $W \subset \mathbb{R}^3$ con $p \in W$ e un'applicazione differenziabile $h : W \to \mathbb{R}$ tale che $f|_{W \cap S} \equiv h|_{W \cap S}$.