Geometria differenziale

Esercizi (28 novembre 2017)

Esercizio 1. Sia U è un aperto di $\mathbb{R}^2$ che contiene l'origine e $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile tale che $f(0) = 0$. Calcolare I, II, dN, k_1, k_2 e K nell'origine per la superficie $S = \{z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$, orientata in modo tale che $\langle N, e_3\rangle > 0$.

Esercizio 2. Sia S una superficie connessa e non singolare in $\mathbb{R}^3$.

(a) Sia $p \in S$ e supponiamo che S sia contenuta in uno dei due semispazi (chiusi) di $\mathbb{R}^3$ determinati dal piano affine $p + T_pS$. Dimostrare che $K(p) \geq 0$.

(b) Supponiamo che S sia chiusa e sia contenuta in una palla chiusa di raggio $R > 0$. Dimostrare che esiste almeno un punto ellittico $q \in S$ in cui $K(q) \geq \frac{1}{R^2}$.

(c) Sia $p \in S$. Supponiamo che esista un segmento aperto L_p tale che $p \in L_p \in S$. Dimostrare che p è un punto parabolico oppure planare, e quindi $K(p) \leq 0$.

(d) Supponiamo $p \in S$ ellittico (ossia $K(p) > 0$). Dimostrare che esiste un intorno $U \subset S$ di p tale che $U \setminus \{p\}$ giace in uno dei due semispazi (aperti) di $\mathbb{R}^3$ determinati dal piano affine $p + T_pS$. Dare un esempio di una superficie S con un punto p tali che $K(p) = 0$ ed esiste un intorno $U \subset S$ di p tale che $U \setminus \{p\}$ giace in uno dei due semispazi (aperti) di $\mathbb{R}^3$ determinati dal piano affine $p + T_pS$.

(e) Supponiamo $p \in S$ iperbolico (ossia $K(p) < 0$). Dimostrare che ogni intorno $U \subset S$ di p viene sconnesso dal piano affine $p + T_pS$. Dare un esempio di una superficie S con un punto p tali che $K(p) = 0$ e ogni intorno $U \subset S$ di p viene sconnesso dal piano affine $p + T_pS$.'

Esercizio 3. Calcolare la curvatura gaussiana delle seguenti superfici $S_i = \{F_i(x, y, z) = 0\}$ in $\mathbb{R}^3$ nel punto p_i

(1) $F_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ con $a, b, c > 0$ e $p_1 = (0, 0, c)$.

(2) $F_2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ con $a, b, c > 0$ e $p_2 = (0, 0, c)$.

(3) $F_3 = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ con $a, b, c > 0$ e $p_3 = (0, 0, c)$.

(4) $F_4 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ con $a, b, c > 0$ e $p_4 \in S_4$.

(5) $F_5 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z$ con $a, b > 0$ e $p_5 = (0, 0, 0)$.

Esercizio 4. Determinare l'immagine della mappa di Gauss $N : R_i \to S^2$ per ciascuna delle seguenti superfici non singolari in $\mathbb{R}^3$.

(1) $R_1 = \{z = x^2 + y^2\}$ orientata da $N_{(0,0,0)} = (0, 0, 1)$.

(2) $R_2 = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ orientata da $N_{(1,0,0)} = (1, 0, 0)$.

(c) $R_3 = \{x^2 + y^2 = \cosh^2(z)\}$ orientata da $N_{(1,0,0)} = (1, 0, 0)$.