Geometria differenziale

Esercizi (12 dicembre 2017)

Esercizio 1. Siano S_1, S_2 due superfici non singolari in $\mathbb{R}^3$ che si intersecano *trasversalmente* (ossia, per ogni $p \in S_1 \cap S_2$ si ha $T_p(S_1) + T_p(S_2) = \mathbb{R}^3$).
Dimostrare che $S_1 \cap S_2$ è una curva non singolare in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Sia S una superficie non singolare in $\mathbb{R}^3$.

(a) Supponiamo che esista una retta affine ℓ tale che, per ogni $p \in S$, la retta affine per p normale a S in p intersechi ℓ. Dimostrare che S è un aperto in una superficie di rotazione attorno a ℓ.

(b) Supponiamo che S sia una superficie di rotazione attorno ad una retta. Dimostrare che esiste un atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i) \subset S\}$ per S tale che $\varphi_i^*(I) = \begin{pmatrix} E(u_2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dove (u_1, u_2) sono le coordinate standard di $U_i \subset \mathbb{R}^2$ e $E(u_2)$ è funzione della sola u_2.

Esercizio 3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie non singolare e sia $X \in \mathfrak{X}(S)$ un campo vettoriale su S. Consideriamo una curva integrale massimale $\gamma : I \to S$ per X, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo che contiene 0.

(i) Mostrare che vale una ed una sola della seguenti:
  (a) γ è costante;
  (b) γ è iniettiva;
  (c) γ è non constante e periodica, ossia esiste $T > 0$ tale che $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ per ogni $t \in I = \mathbb{R}$.

Dimostrare inoltre che, nei casi (b) e (c), sia ha $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

(ii) Nel caso (c) sopra, dimostrare che esiste $T > 0$ minimo (detto *periodo*) tale che $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Siano dati i campi vettoriali X_i seguenti su $\mathbb{R}^2$

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

(i) Calcolare le parentesi $[X_i, X_j]$.

(ii) Determinare esplicitamente il flusso Φ_i associato a X_i per ogni i.

Esercizio 5. Considerare i campi vettoriali seguenti su $\mathbb{R}^2$

$$V = y\frac{\partial}{\partial x} + \left[-x + (1 - x^2 - y^2)y\right]\frac{\partial}{\partial y}, \qquad W = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

(i) Dimostrare che V ha esattamente una curva integrale periodica (non costante).

(ii) Dire se W ha curve integrali periodiche (non costanti).

Esercizio 6 (Più difficile). Sia U un aperto di $\mathbb{R}^2$ e siano X, Y due campi vettoriali su U. Denotiamo con $(\Phi_X^t)_t$ il flusso generato da X e con $(\Phi_X^s)_s$ il flusso generato da Y. Dimostrare che, per ogni $p \in S$, si ha

$$[X, Y]_p = \dot{\gamma}(0)$$

dove $\gamma : [0, \varepsilon) \to S$ è definita come $\gamma(t) := \Phi_Y^{-\sqrt{t}} \circ \Phi_X^{-\sqrt{t}} \circ \Phi_Y^{\sqrt{t}} \circ \Phi_X^{\sqrt{t}}(p)$.

Esercizio 7 (Più difficile). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, il cui bordo $\partial\Omega = S$ sia una superficie non singolare. Orientiamo S in modo tale che il vettore normale unitario N esca da Ω. Supponiamo che le curvature principali di S siano entrambe strettamente negative in ogni punto.
Dimostrare che $\overline{\Omega}$ è strettamente convesso.