Geometria differenziale

Esercizi (4 gennaio 2018)

Esercizio 1 (Superfici con punti tutti ombelicali). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie connessa, non singolare. Supponiamo che ogni punto di S sia ombelicale.
Dimostrare che allora la curvatura di S è costante, e S è contenuta in un piano oppure in una sfera.

Esercizio 2 (Linee di curvatura). Sia S una superficie non singolare in $\mathbb{R}^3$. Una curva $\gamma : J \to S$ (a meno di riparametrizzazione) con J intervallo si dice *linea di curvatura* se $\dot\gamma(t)$ è un autovettore di $dN_{\gamma(t)}$ per ogni $t \in J$.
Supponiamo che S non abbia punti ombelicali. Dimostrare che per ogni punto passano esattamente due linee di curvatura.

Esercizio 3 (Superfici di rotazione con curvatura costante). Sia J un intervallo e $\gamma : J \to \mathbb{R}^2_{y,z}$ una curva in parametro d'arco $\gamma(t) = (r(t), h(t))$. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di rotazione ottenuta ruotando γ attorno all'asse z, con coordinate (t, ϑ).

(i) Scrivere la prima forma fondamentale I di S in termini delle funzioni r e h.
(ii) Calcolare la curvatura geodetica dei paralleli $\{t = \text{costante}\}$ in S.
(iii) Dimostrare che S ha curvatura gaussiana costante K se e solo se la funzione $r(t)$ soddisfa $\ddot r + Kr = 0$.
(iv) Supponiamo che S abbia curvatura costante K. Trovare la generica espressione per γ.

Esercizio 4 (Superfici rigate). Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ si dice *rigata* se ammette parametrizzazioni locali del tipo $\varphi(u, v) = c(u) + v \cdot X(u)$, dove $c(u)$ è una curva differenziabile e $0 \neq X(u) \in \mathbb{R}^3$ (e $X(u)$ va interpretato come un vettore in $\mathbb{R}^3$ applicato nel punto $c(u)$).

(i) Dimostrare che, se S è rigata, allora ammette parametrizzazioni locali (*standard*) del tipo $\varphi(t, s) = \gamma(t) + s \cdot Y(t)$, con $\|\dot Y(t)\| = 1$ e $\langle \dot\gamma(t), \dot Y(t)\rangle = 0$ per ogni t.
(ii) Dimostrare che l'iperboloide ad una falda $H = \{x^2 + y^2 - a^2z^2 = b^2\}$ con $a, b > 0$ è una superficie rigata. Determinare le rette contenute in H.
(iii) Sia S una superficie tangente a c, ossia una superficie rigata che ammetta parametrizzazioni locali con $X(u)$ parallelo a $\dot c(u)$ per ogni u. Dimostrare che S ha curvatura gaussiana $K = 0$.
(iv) Sia S una superficie senza punti ombelicali e con $K = 0$ ovunque. Dimostrare che S è rigata. *[Suggerimento: può essere utile considerare le linee di curvatura corrispondenti all'autovalore* 0 *di* dN*.]*

Esercizio 5 (Simboli di Christoffel). Calcolare i simboli di Christoffel di $\mathbb{R}^2$ in coordinate polari e di S^2 in coordinate sferiche.
Calcolare i simboli di Christoffel del semipiano iperbolico $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ (munito della metrica $g = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$) in coordinate cartesiane.

Esercizio 6 (Curvatura geodetica). Sia $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva regolare orientata sulla superficie non singolare orientata $S \subset \mathbb{R}^3$ e sia $p = \gamma(0)$. Dimostrare che la curvatura geodetica di γ in p coincide con la curvatura della curva piana $\pi_p \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_pS$, dove $\pi_p : \mathbb{R}^3 \to T_pS$ è la proiezione ortogonale su T_pS (interpretato come piano affine in $\mathbb{R}^3$ passante per p).

Esercizio 7 (Isometrie di $\mathbb{R}^2$ e S^2). Una isometria del piano euclideo $\mathbb{R}^2$ in sé è una applicazione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $d(G(p), G(q)) = d(p, q)$ per ogni $p, q \in \mathbb{R}^2$.

(a) Dimostrare che le applicazioni $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del tipo $F(p) = Ap + q_0$ con $A \in \mathrm{O}(2, \mathbb{R})$ e $q_0 \in \mathbb{R}^2$ sono isometrie. Notare che $dF_p = A$ per ogni $p \in \mathbb{R}^2$.

(b) Dimostrare che, dato $p \in \mathbb{R}^2$ e $v \in T_p\mathbb{R}^2$ di norma 1, esiste $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometria del tipo visto in (b) tale che $F(0) = p$ e $dF_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$.

(c) Sia $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometria. Dimostrare che, se $G(0) = 0$ e $dG_0 = I$, allora G è l'identità. *[Suggerimento: può essere utile pensare all'immagine tramite G delle geodetiche che escono dall'origine di $\mathbb{R}^2$.]*

(d) Sia $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometria qualunque. Dimostrare che esistono $q_0 \in \mathbb{R}^2$ e una $A \in \mathrm{O}(2, \mathbb{R})$ tali che $G(p) = A(p) + q_0$.

(e) In modo simile, dimostrare che le isometrie di S^2 in sé sono elementi di $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$.

(f) Ragionare in modo analogo nel caso di $\mathbb{R}^n$ e S^n.

Esercizio 8 (Isometrie di $\mathbb{H}^2$). Sia $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, y > 0\}$ con la metrica $g = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ il semipiano iperbolico, e sia $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici reali 2×2 con determinante 1 viste a meno del segno (ossia la matrice A è equivalente a $-A$).

(a) Dimostrare che, per ogni $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, l'associazione $M_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ definisce una isometria $M_A : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$.

(b) Dimostrare che la matrici del tipo $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$ con $\theta \in [0, \pi)$ corrispondono a isometrie M_A che fissano i. Come agisce il differenziale dM_A sul tangente $T_i\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{R}^2$?

(c) Dimostrare che le matrici $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}_+$ mandano la geodetica $\mathbb{H}^2 \cap \{x = 0\}$ in sé.

(d) Dimostrare che le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$ mandano ciascuna curva $\mathbb{H}^2 \cap \{y = y_0\}$ in sé.

(e) Dimostrare che, per ogni $p \in \mathbb{H}^2$ e ogni $v \in T_p\mathbb{H}^2$ di norma 1, esiste una $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tale che $M_A(i) = p$ e $(dM_A)_i(1) = v$.

(f) Dimostrare che una isometria $G : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ è del tipo $G = M_A$ per qualche $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.