Geometria differenziale

Esercizi (21 gennaio 2018)

Un *semispazio* in $\mathbb{R}^3$ è un chiuso del tipo $H := h^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, dove $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una applicazione affine non nulla. Un *poliedro convesso* P in $\mathbb{R}^3$ è un chiuso limitato, ottenuto come intersezione di finiti semispazi chiusi $\{H_i\}$: se $H_i \cap P \neq \emptyset$, allora H_i si dice *piano di supporto* di P. Se $(H_i \cap P)^\circ \neq \emptyset$, allora $H_i \cap P$ si dice una *faccia* di P; se $H_i \cap P$ è un segmento, allora $H_i \cap P$ si dice *spigolo* di P; se $H_i \cap P$ è un punto, allora $H_i \cap P$ si dice *vertice* di P. Il poliedro convesso P si dice *non degenere,* se non è contenuto in un piano affine. Definiamo $\mathrm{Iso}(P)$ come il sottogruppo delle isometrie affini di $\mathbb{R}^3$ che mandano P in P.

Esercizio 1. Un poliedro convesso non degenere in $\mathbb{R}^3$ è un *solido platonico* se $\mathrm{Iso}(P)$ è transitivo sui vertici di P, sui lati orientati di P e sulle facce di P. Classificare i solidi platonici.

Un sottoinsieme chiuso F di $\mathbb{R}^3$ è *localmente convesso in* $p \in F$ se esiste un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^3$ tale che $U \cap F = U \cap K$, dove K è un convesso in $\mathbb{R}^3$. Un piano di supporto in p è il bordo di un semispazio affine chiuso H passante per p tale che $U \cap F \subseteq H$ ed è orientato in modo che la normale punti fuori da H. Chiamiamo $\mathcal{T}_p(F)$ l'insieme dei piani di supporto in p.

Esercizio 2. Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ il cono $C = \{z^2 = x^2 + y^2,\ z \in [0,1]\}$, orientato in modo che la normale positiva punti verso l'esterno.

(i) Dimostrare che il contributo del vertice $O \in C$ all'integrale

$$\int_C K\omega \qquad (\star)$$

con ω misura d'area su C, coincide con l'area dell'immagine dell'applicazione $\mathcal{T}_O(C) \to S^2$ che associa ad un piano di supporto orientato Π la normale unitaria positiva a Π.

(ii) Calcolare il contributo della curva $\gamma = \{z = 1,\ x^2 + y^2 = 1\}$ all'integrale $(\star)$.

(iii) Verificare il teorema di Gauss-Bonnet per C.

Esercizio 3. Sia S una superficie con una metrica g con bordo e vertici, omeomorfa ad un disco e con n lati geodetici (anche detta "poligono geodetico"). Siano α_i gli angoli interni di S nei vertici.

(i) Se $K = 0$, calcolare $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

(ii) Se $K = \pm 1$, calcolare l'area di S in funzione di $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Esercizio 4. Sia S una superficie in $\mathbb{R}^3$ e sia $p \in S$ un punto. Per ogni triangolo $T \subset S$ con bordo geodetico, sia $\mathrm{Ang}(T)$ la somma dei suoi angoli interni. Dimostrare che

$$K_p = \lim_{d(T,p)\to 0} \frac{\mathrm{Ang}(T) - \pi}{\mathrm{Area}(T)}$$

dove $d(T,p)$ è il sup delle distanze tra p e un punto di T.

Esercizio 5. Sia S una superficie con una metrica g e sia $p \in S$. Consideriamo una base ortonormale (v,w) di T_pS e, per ogni $s \in \mathbb{R}$, sia $\gamma_s(t)$ l'unica geodetica su S che soddisfi $\gamma_s(0) = p$ e $\dot\gamma_s(0) = v + sw$. Chiamiamo $\mathcal{J}$ il campo vettoriale lungo $\gamma_0(t)$ definito come $\mathcal{J}_{\gamma_0(t)} := \frac{d\gamma_s(t)}{ds}|_{s=0} \in T_{\gamma_0(t)}S$.

(i) Dimostrare che $\mathcal{J}_{\gamma_0(t)}$ è ortogonale a $\dot\gamma_0(t)$ per ogni t.

(ii) Sia $f(t) = \|\mathcal{J}_{\gamma_0(t)}\|$. Dimostrare che

$$\ddot f(t) + K_{\gamma_0(t)} f(t) = 0.$$

[Suggerimento: considerare $g(\nabla_{\mathcal{J}}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\ \widehat{\mathcal{J}}) = 0$ lungo γ_0, dove $\widehat{\mathcal{J}} = \frac{\mathcal{J}}{\|\mathcal{J}\|}$.]

(iii) Trovare $f(t)$ esplicitamente nel caso in cui K sia costante.

(iv) Supponiamo K costante e siano (r,θ) coordinate polari in un intorno U di p centrate in p (ossia (r,θ) sono coordinate polari in T_pS e un intorno di $O \in T_pS$ è identificato con U tramite $\exp_p$). Scrivere la metrica g in coordinate polari (r,θ).