Geometria differenziale

Il teorema di Gauss-Bonnet (22 gennaio 2018)

Proposizione 1. *Sia D il disco unitario chiuso in $\mathbb{R}^2$ munito dell'orientazione standard e di una metrica liscia g. Allora*

$$\int_{\partial D} k_g\, ds = 2\pi - \int_D K_g \cdot \omega_g$$

dove k_g è la curvatura geodetica di ∂D (percorso in senso antiorario), s è il parametro d'arco su ∂D e ω_g è la misura d'area indotta da g.

Osservazione 2. Chiaramente nella Proposizione 1 è possibile sostituire D con un qualsiasi dominio chiuso limitato di $\mathbb{R}^2$ omeomorfo ad un disco, che abbia ∂D liscio. Ovviamente, prendendo in D l'orientazione data da $\mathbb{R}^2$, si avrà una orientazione indotta su ∂D.

Consideriamo la curva C^1 regolare $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\beta(t) = \begin{cases} (0,\ 1+t) & \text{per } t \leq -1/2 \\ \big(1/2 - (2/\pi)\cos(t\pi/2 + \pi/4),\ 1/2 - (2/\pi)\sin(t\pi/2+\pi/4)\big) & \text{per } t \in [-1/2,\ 1/2] \\ (t,\ 0) & \text{per } t \geq 1/2 \end{cases}$$

e sia $\beta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita come $\beta_\varepsilon(t) := \varepsilon\beta(t/\varepsilon)$. Notiamo che β_ε converge a

$$\beta_0(t) = \begin{cases} (0,\ -t) & \text{per } t \leq 0 \\ (t,\ 0) & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

uniformemente e converge in modo C^1 al di fuori di ogni palla che contenga l'origine.

Lemma 3. *Siano $U \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto che contiene l'origine e $\varphi : U \to S \subset \mathbb{R}^3$ una carta della superficie S che preservi l'orientazione. Allora*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} k_{\gamma_\varepsilon} ds = \int_{\gamma_0} k_{\gamma_0} ds + (\pi - \alpha)$$

dove γ_ε è la restrizione di $\varphi \circ \beta_\varepsilon$ ad un intervallo $[a, b]$ che contenga $[-1,\ 1]$, l'integrale $\int_{\gamma_0}$ è l'integrale sulla parte liscia di γ_0, e α è l'angolo in $\gamma_0(0)$ della regione di S che contiene $J\dot\gamma_0(0)$ delimitata da γ_0.

Dimostrazione del Lemma 3. Sia $g = \varphi^*(I_S)$. A meno di comporre φ con una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$, possiamo supporre che g_0 sia costante. Dunque $g = g_0 + O(\sqrt{x^2+y^2})$. In particolare, nella palla $\overline{B}(0, \varepsilon)$ centrata nell'origine di raggio ε abbiamo $g = g_0 + O(\varepsilon)$ e analogamente per i simboli di Christoffel $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(0) + O(\varepsilon)$.

Poiché $\dot\beta_\varepsilon(t)$ ha norma 1 rispetto alla metrica g,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} k_{\gamma_\varepsilon} ds = \int_a^b k_{\beta_\varepsilon, g}(t) dt$$

dove $k_{\beta_\varepsilon, g}$ è calcolata rispetto alla metrica g. Ora, se J in ogni punto è la rotazione positiva di $\pi/2$ rispetto a g e J_0 è la rotazione positive di $\pi/2$ rispetto a g_0, si ha

$$\begin{aligned} k_{\beta_\varepsilon, g} &= \|\dot\beta_\varepsilon\|_g^{-3} g\left(\nabla_{\dot\beta_\varepsilon}\dot\beta_e,\ J\dot\beta_\varepsilon\right) = \\ &= \|\dot\beta_\varepsilon\|_{g_0}^{-3}\ g_0\left(\ddot\beta_\varepsilon,\ J_0\dot\beta_\varepsilon\right) + O(1) = k_{\beta_\varepsilon, g_0} + O(1) \end{aligned}$$

in quanto il cammino β_ε è sempre contenuto nella $\overline{B}(0, \varepsilon)$. Ne segue che

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k_{\beta_\varepsilon, g} dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k_{\beta_\varepsilon, g_0} dt + O(\varepsilon)$$

Ora, cè una isometria lineare L che manda $(\mathbb{R}^2, g_0)$ in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, mandando al contempo la curva β_0 nella curva

$$\hat\beta_0(t) = \begin{cases} (-\cos(\alpha)t,\ -\sin(\alpha)t) & \text{per } t \leq 0 \\ (t,\ 0) & \text{per } t \geq 1 \end{cases}$$

e inoltre $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k_{\beta_\varepsilon, g_0} dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k_{L\circ\beta_\varepsilon, I} dt$. Per calcolo diretto (visto in classe) si ottiene

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k_{L\circ\beta_\varepsilon, I} dt = \pi - \alpha.$$

Dunque

$$\int_{\gamma_\varepsilon} k_{\gamma_\varepsilon} ds = \int_a^{-\varepsilon} k_{\gamma_\varepsilon} ds + \int_\varepsilon^b k_{\gamma_\varepsilon} ds + \pi - \alpha + O(\varepsilon) = \int_a^{-\varepsilon} k_{\gamma_0} ds + \int_\varepsilon^b k_{\gamma_0} ds + \pi - \alpha + O(\varepsilon)$$

da cui la tesi. □

Corollario 4 (Enunciato locale del teorema di Gauss-Bonnet). *Sia S una superficie orientata omeomorfa ad un disco chiuso con una metrica g tale che il bordo ∂S sia liscio a tratti, con singolarità in $\{p_i \mid i \in I\}$ che formano angoli interni α_i. Allora*

$$\int_S K_g \cdot \omega_g + \int_{\partial S} k_g \, ds + \sum_{i \in I} \delta_i = 2\pi$$

dove $\delta_i = \pi - \alpha_i$.

Dimostrazione del Corollario 4. Triangolando S in modo abbastanza fine, possiamo supporre che ciascuno dei triangoli appartenga ad una carta dell'atlante di S. Se si dimostra l'enunciato per superfici S che siano immagine di una singola carta, allora si ottiene l'enunciato sommando i contributi per ciascuno dei triangoli nella triangolazione di S, in modo analogo a quanto fatto in basso per la dimostrazione del Corollario 5.

Supponiamo quindi che S sia parametrizzata da un'unica carta $\varphi : D \to S \subset \mathbb{R}^3$, dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio chiuso, omeomorfo ad un disco, con bordo liscio a tratti. Sia $g = \varphi^*(I)$ la metrica su D.

Ci siamo ridotti ad una situazione simile a quella della Proposizione 1, con la differenza che D ora non è liscio. Sia $\tilde{\gamma}_0 : S^1 \to \mathbb{R}^2$ una parametrizzazione orientata del bordo di D.

Utilizzando il Lemma 3 su $\tilde{\gamma}$ in piccoli intorno dei punti di non liscezza di $\tilde{\gamma}$, otteniamo delle curve lisce $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ che delimitano dischi D_ε tali che $\tilde{\gamma}_\varepsilon \to \tilde{\gamma}_0$. E quindi

$$\int_{D_\varepsilon} K_g \cdot \omega_g + \int_{\tilde{\gamma}_\varepsilon} k_g \, ds \to \int_D K_g \cdot \omega_g + \int_{\tilde{\gamma}_0} k_g \, ds + \sum_{i \in I} (\pi - \alpha_i)$$

da cui la tesi. □

Corollario 5 (Teorema di Gauss-Bonnet). *Sia S una superficie orientata e compatta, con una metrica g tale che il bordo ∂S sia liscio a tratti, con singolarità in $\{p_v \mid v \in V_\partial\}$ che formano angoli interni α_v. Allora*

$$\int_S K_g \cdot \omega_g + \int_{\partial S} k_g \; ds + \sum_{v \in V_\partial} \delta_v = 2\pi \cdot \chi(S)$$

dove $\delta_v = \pi - \alpha_v$.

Dimostrazione del Corollario 5. Considerariamo una triangolazione finita di S con f triangoli, e lati e v vertici, in modo che ciascun lato sia liscio. Vogliamo applicare il Teorema 4 a ciascun triangolo e sommare i contributi.

Siano $\{T_f\}_{f \in F}$ i triangoli, $\{L_e\}_{e \in E}$ i lati e $\{p_v\}_{v \in V}$ i vertici della triangolazione, da cui $\chi(S) = c_0 - c_1 + c_2$ con $c_0 = |V|$, $c_1 = |E|$ e $c_2 = |F|$. A meno di raffinare la triangolazione, possiamo assumere che la chiusura $\overline{T}_f$ di ciascuna faccia sia un disco. Abbiamo denotato con V_∂ il sottoinsieme di V dei vertici che sono sul bordo ∂S.

Sommando i contributi del teorema di Gauss-Bonnet locale, otteniamo

$$\sum_{f \in F} \left(\int_{T_f} K_g \cdot \omega_g + \sum_{\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}_f} \int_{\overrightarrow{e}} k_g \, ds + \sum_{v \in V_f} (\pi - \alpha(f, v)) \right) = 2\pi c_2$$

dove $\overrightarrow{E}_f$ sono i lati orientati che bordano la faccia T_f con l'orientazione indotta da quella su T_f e V_f sono i vertici nel bordo di T_f, e $\alpha(f, v)$ è l'angolo interno a T_f nel vertice v di T_f.

Chiaramente si ha $\sum_{f \in F} \int_{T_f} K_g \cdot \omega_g = \int_S K_g \cdot \omega_g$.

Inoltre, se il lato e è bordo di due celle distinte, allora l'integrale lungo e compare due volte: una volta lungo l'orientazione $\overrightarrow{e}$ e una volta con l'orientazione opposta $\overleftarrow{e}$. Poiché $k_{\overrightarrow{e}} = -k_{\overleftarrow{e}}$, ne segue che il contributo lungo il lato e si cancella. Dunque i contributi dei lati che non si cancellano sono quelli lungo il bordo, ossia

$$\sum_{f\in F}\sum_{\vec{e}\in\vec{E}_f}\int_{\vec{e}} k_g\,ds = \int_{\partial S} k_g\,ds$$

Infine, supponiamo che $v\in V$ e siano F_v le facce che contengono il vertice v. Chiaramente

$$\sum_{f\in F}\left(\sum_{v\in V_f}(\pi-\alpha(f,v))\right) = \sum_{v\in V}\left(\sum_{f\in F_v}(\pi-\alpha(f,v))\right).$$

Ora,

$$\sum_{f\in F_v}(\pi-\alpha(f,v)) = \begin{cases}\pi\mathrm{val}(v)-\sum_{f\in F_v}\alpha(f,v) & \text{se } v\notin\partial S\\ \pi(\mathrm{val}(v)-1)-\sum_{f\in F_v}\alpha(f,v) & \text{se } v\in\partial S\end{cases}$$

Se $v\notin\partial S$, si ha $\sum_{f\in F_v}\alpha(f,v)=2\pi$. Se $v\in\partial S$, allora $\sum_{f\in F_v}\alpha(f,v)=\alpha_v$. E dunque

$$\sum_{f\in F_v}(\pi-\alpha(f,v)) = \begin{cases}\pi(\mathrm{val}(v)-2) & \text{se } v\notin\partial S\\ \pi(\mathrm{val}(v)-2)+(\pi-\alpha_v) & \text{se } v\in\partial S\end{cases}$$

e

$$\sum_{v\in V}\left(\sum_{f\in F_v}(\pi-\alpha(f,v)\right) = \pi\left(\sum_{v\in V}\mathrm{val}(v)\right)-2\pi c_0-\sum_{v\in V_\partial}(\pi-\alpha_v) = 2\pi c_1-2\pi c_0$$

in quanto ogni lato ha due vertici distinti come estremi, e perciò $2c_1=\sum_{v\in V}\mathrm{val}(v)$.

Mettendo insieme i vari addendi, otteniamo

$$\int_S K_g\cdot\omega_g+\int_{\partial S}k_g\,ds+2\pi(c_1-c_0)+\sum_{v\in V_\partial}(\pi-\alpha_v)=2\pi c_2$$

da cui la conclusione. □

Connessione di Levi-Civita e curvatura. Sia S una superficie orientata con una metrica g. Ricordiamo che, se $S\subset\mathbb{R}^3$ e $g=I_S$, allora la connessione di Levi-Civita è definita come

$$\nabla_v W = \pi_p\left(\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial v}\right)$$

dove $p\in S$, $v\in T_pS$, W è un campo vettoriale su S e $\widetilde{W}$ è una sua estensione in un intorno di p in $\mathbb{R}^3$, $\frac{\partial}{\partial v}$ è la derivata direzionale e $\pi_p:\mathbb{R}^3\to T_pS$ è la proiezione (lineare) ortogonale. Notiamo che, se $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ è una curva tale che $\gamma(0)=p$ e $\dot\gamma(0)=v$, allora $\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial v}=\frac{d}{dt}(W\circ\gamma)\big|_{t=0}$, dove ora stiamo vededo $W\circ\gamma$ come una applicazione $W\circ\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^3$.

Se V è un campo vettoriale, allora $\nabla_V W$ è un campo vettoriale definito come

$$(\nabla_V W)_p := \nabla_{V_p}W.$$

Esercizio 6. *Sia U una aperto di S.*

(i) *Se (x,y) è un sistema di coordinate in U e denotiamo il campo vettoriale coordinato $\frac{\partial}{\partial x}$ con ∂_x e il campo vettoriale coordinato $\frac{\partial}{\partial y}$ con ∂_y, allora*

$$\nabla_{\partial_x}\partial_y-\nabla_{\partial y}\partial x=0.$$

(ii) *Dedurre da (i) che, se V,W sono campi vettoriali in U tangenti a S, allora*

$$\nabla_V W-\nabla_W V=[V,W].$$

Definizione 7. La *connessione di Levi-Civita* ∇ su una superficie S con una metrica g è l'unica applicazione $\nabla:\mathcal{X}(S)\times\mathcal{X}(S)\to\mathcal{X}(S)$ tale che

(i) ∇ è una connessione, ossia $\nabla_{f_1V_1+f_2V_2}(Z)=f_1\nabla_{V_1}(Z)+f_2\nabla_{V_2}(Z)$ e $\nabla_V(h_1Z_1+h_2Z_2)=V(h_1)Z_1+h_1\nabla_V Z_1+V(h_2)Z_2+h_2\nabla_V Z_2$.
(ii) ∇ è compatibile con g, ossia $V\cdot g(Z_1,Z_2)=g(\nabla_V Z_1,\,Z_2)+g(Z_1,\,\nabla_V Z_2)$
(iii) ∇ è senza torsione, ossia $\nabla_V W-\nabla_W V-[V,W]=0$.

Esercizio 8. *Se $U \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto, g è una metrica su U e ∇ è la connessione di Levi-Civita su U indotta da g, allora i simboli di Christoffel $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$, che appaiono per definizione nella formula*

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

sono legati alla metrica g tramite la formula

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right)$$

dove g^{kl} è l'entrata (k,l) della matrice inversa di g.
(Abbiamo indicato con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ l'i-esimo campo vettoriale coordinato, dove (x_1, x_2) è il sistema di coordinate standard su $\mathbb{R}^2$.

Ricordiamo il seguente.

Teorema 9 (Theorema egregium). *Sia S una superficie in $\mathbb{R}^3$ e sia $K = -det(dN)$ la sua curvatura gaussiana. Allora per ogni punto $p \in S$*

$$K_p = -I_S\Big((\nabla_{\partial_1} \nabla_{\partial_2} - \nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1}) \partial_1,\ \partial_2 \Big)$$

dove (∂_1, ∂_2) è una coppia di campi vettoriali coordinati vicino p, che siano ortonormali in p. Dunque K dipende solo dalla metrica $g = I_S$.

Esercizio 10. *Sia S una superficie munita di metrica g e sia $p \in S$. Sia (∂_1, ∂_2) una coppia di campi vettoriali coordinati su un aperto $U \subset S$ che contiene p e supponiamo che ∂_1, ∂_2 siano ortonormali nel punto p.*

(i) *Si ha*

$$g\Big((\nabla_{\partial_1} \nabla_{\partial_2} - \nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1}) \partial_1,\ \partial_2 \Big) = \frac{1}{\|V \wedge W\|^2} g\Big(R(V,W)V, W \Big)$$

dove $R(V,W)Z = (\nabla_V \nabla_W - \nabla_W \nabla_V - \nabla_{[V,W]})Z$ è il tensore di curvatura di Riemann e $\|V \wedge W\|^2 = \|V\|^2 \|W\|^2 - g(V,W)^2$.

(ii) *Il campo vettoriale $R(V,W)Z$ dipende linearmente da ciascuna delle entrate V, W, Z separatamente, e inoltre $R(fV,W)Z = R(V,fW)Z = R(V,W)fZ = f \cdot R(V,W)Z$.*

(iii) *Si ha $g(R(V,W)V,W) = -K \|V \wedge W\|^2$.*

Dimostrazione della Proposizione 1. Mettiamo su $D \backslash \{0\}$ coordinate polari (r, θ) e sia $\gamma_r : [0,1] \to D$ la curva $\gamma_r(\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ per $r \in (0,1]$. Denotiamo con $k_r(\theta)$ la curvatura geodetica di γ_r nel punto $\gamma_r(\theta)$ rispetto alla metrica g.

Notiamo che $\int_{\partial D} k_g ds = \int_{\gamma_1} k_1(t) \|\dot\gamma_1(\theta)\| d\theta$. Applicando il teorema di Green nella corona $A_e = \{\varepsilon \leq r \leq 1\}$, otteniamo

$$\int_{\gamma_1} k_1(\theta) \|\dot\gamma_1(\theta)\| d\theta - \int_{\gamma_\varepsilon} k_\varepsilon(\theta) \|\dot\gamma_\varepsilon(\theta)\| d\theta = \int_{A_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \Big(k_r(\theta) \|\dot\gamma_r(\theta)\| \Big)\, dr \wedge d\theta.$$

Per concludere, dimostreremo che

(a) $\int_{\gamma_\varepsilon} k_\varepsilon(\theta) \|\dot\gamma_\varepsilon(\theta)\| d\theta = 2\pi + O(\varepsilon)$

(b) $\int_{A_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r(\theta) \|\dot\gamma_r(\theta)\| \right) dr \wedge d\theta = -\int_{A_\varepsilon} K\omega$.

La tesi si ottiene quindi prendendo il limite per $\varepsilon \to 0$.

Dimostrazione dell'asserzione (a). In modo simile a quanto visto nella dimostrazione del Lemma 3,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} k_\varepsilon(\theta) \|\dot\gamma_\varepsilon(\theta)\| d\theta = \int_{\gamma_\varepsilon} k_{\varepsilon, g_0}(\theta) \|\dot\gamma_\varepsilon(\theta)\|_{g_0} d\theta + O(\varepsilon)$$

dove g_0 è la metrica costante che coincide con g nell'origine, $\|\cdot\|_{g_0}$ è la norma rispetto a g_0 e k_{ε, g_0} è la curvatura di γ_ε rispetto a g_0. D'altra parte $(\mathbb{R}^2, g_0)$ è linearmente isomorfo a $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ e quindi

$$\int_{\gamma_\varepsilon} k_{\varepsilon, g_0}(\theta) \|\dot\gamma_\varepsilon(\theta)\|_{g_0} d\theta = 2\pi$$

poiché γ_ε è una curva liscia, semplice, chiusa. Prendendo il limite per $\varepsilon \to 0$ si conclude. $\square$

Osservazione 11. Osserviamo che, se W è un campo vettoriale con $\|W\| = 1$ in ogni punto, allora $\nabla_V W$ è ortogonale a W per ogni campo vettoriale V. Infatti $g(\nabla_V W, W) = \frac{1}{2} V \cdot g(W, W) = \frac{1}{2} V(1) = 0$ perché $g(W, W) = 1$ è la funzione costante di valore 1.

Dimostrazione dell'asserzione (b). Scriviamo k_r al posto di $k_r(\theta)$ e γ_r al posto di $\gamma_r(\theta)$ per brevità. Notiamo che

$$k_r \|\dot\gamma_r\| = \|\dot\gamma_r\|^{-2} g\Big(\nabla_{\dot\gamma_r} \dot\gamma_r,\, J\dot\gamma_r\Big) = g\Big(\nabla_{\dot\gamma_r} \hat\gamma_r,\, J\hat\gamma_r\Big)$$

dove J è la rotazione positive di $\pi/2$ rispetto a g e $\hat\gamma_r = \frac{\dot\gamma_r}{\|\dot\gamma_r\|}$. Ora

$$\begin{aligned} \partial_r \Big(k_r \|\dot\gamma_r\|\Big) &= \partial_r g\Big(\nabla_{\dot\gamma_r} \hat\gamma_r,\, J\hat\gamma_r\Big) = \\ &= g\Big(\nabla_{\partial r} \nabla_{\dot\gamma_r} \hat\gamma_r,\, J\hat\gamma_r\Big) + g\Big(\nabla_{\dot\gamma_r} \hat\gamma_r,\, \nabla_{\partial r} J\hat\gamma_r\Big) \end{aligned}$$

Dall'Osservazione 11 segue che $g\Big(\nabla_{\dot\gamma_r} \hat\gamma_r,\, \nabla_{\partial r} J\hat\gamma_r\Big) = 0$.

Inoltre, essendo $\dot\gamma_r = \partial_\theta$, ne segue che $[\partial_r,\, \partial_\theta] = 0$. Dunque

$$\partial_r \Big(k_r \|\dot\gamma_r\|\Big) = g\Big(R(\partial r, \dot\gamma_r)\hat\gamma_r,\, J\hat\gamma_r\Big) + g\Big(\nabla_{\dot\gamma_r} \nabla_{\partial r} \hat\gamma_r,\, J\hat\gamma_r\Big)$$

Il secondo addendo a destra può essere riscritto come

$$g\Big(\nabla_{\dot\gamma_r} \nabla_{\partial r} \hat\gamma_r,\, J\hat\gamma_r\Big) = \partial_\theta g\Big(\nabla_{\partial r} \hat\gamma_r,\, J\hat\gamma_r\Big) - g\Big(\nabla_{\partial r} \hat\gamma_r,\, \nabla_{\dot\gamma_r} J\hat\gamma_r\Big)$$

e di nuovo dall'Osservazione 11 segue che $g\Big(\nabla_{\partial r} \hat\gamma_r,\, \nabla_{\dot\gamma_r} J\hat\gamma_r\Big) = 0$.

Decomponendo ∂_r e ∂_θ rispetto alla base g-ortonormale $(\hat\gamma_r,\, J\hat\gamma_r)$ e usando le proprietà di multilinearità dell'operatore R, otteniamo

$$g\Big(R(\partial_r, \dot\gamma_r)\hat\gamma_r,\, J\hat\gamma_r\Big) = -K \|\partial_r \wedge \partial_\theta\|$$

e che $\|\partial_r \wedge \partial_\theta\|\, dr \wedge d\theta = \omega$. (Notare che il segno negativo deriva dal fatto che $g(J\hat\gamma, \partial_r) < 0$.)

Abbiamo quindi

$$\int_{A_\varepsilon} \partial_r \Big(k_r \|\dot\gamma_r\|\Big)\, dr \wedge d\theta = \int_{A_\varepsilon} (-K)\omega + \int_{r=0}^{\varepsilon} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \partial_\theta g\Big(\nabla_{\partial r} \hat\gamma_r,\, J\hat\gamma_r\Big) d\theta \right) dr$$

e l'integrale $\int_{\theta=0}^{2\pi} \partial_\theta g\Big(\nabla_{\partial r} \hat\gamma_r,\, J\hat\gamma_r\Big) d\theta = 0$ per il teorema fondamentale del calcolo, da cui la conclusione.

□