Geometria differenziale

Superfici in $\mathbb{R}^3$ con $K \equiv 0$ non ombelicali (27 gennaio 2018)

Proposizione 1. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare con curvatura gaussiana $K = 0$ ovunque. Supponiamo che nessun punto di S sia ombelicale (ossia che dN abbia rango 1 ovunque).*
Allora S è rigata, ossia per ogni punto p di S esiste un intorno $V \subset S$ aperto e una carta $\varphi : U \to V \subset S$ con $U \subset \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(u, s) = \alpha(u) + s\beta(u)$ per opportune funzioni $\alpha, \beta : U \to \mathbb{R}^3$.

Ricordiamo che, se N è un campo di vettori normali unitari sulla superficie in $\mathbb{R}^3$ e w, z sono campi vettoriali tangenti alla superficie, allora

$$\begin{aligned}\nabla_z(w) &= \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{w}) - \langle N, \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{w})\rangle N = \\ &= \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{w}) - \frac{\partial}{\partial z}\langle N, w\rangle N + \langle \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{N}), w\rangle N = \\ &= \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{w}) + \langle dN(z), w\rangle N\end{aligned}$$

dove $\tilde{w}$ è una estensione del campo vettoriale w a $\tilde{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (e similmente $\tilde{N}$ è l'estensione di N a $\mathbb{R}^3$) e $\frac{\partial}{\partial z}$ è la derivata direzionale ordinaria per funzioni a valori in $\mathbb{R}^3$.

Dimostrazione della Proposizione 1. Sia $p \in S$ e consideriamo un piccolo intorno aperto connesso $V \subset S$ di p. Fissiamo una orientazione su V, ossia scegliamo una normale unitaria $N : V \to \mathbb{R}^3$.

Per ogni $q \in V$, il tangente T_qS si decompone in una somma diretta ortogonale $E_0(q) \oplus E_\lambda(q)$, dove $E_0(q) \subset T_qS$ è il nucleo di dN_q e $E_\lambda(q)$ è l'altro sottospazio di autovalore $\lambda(q)$, dove $\lambda : V \to \mathbb{R}$ è una funzione che non assume mai valore zero.

Fissiamo $v_p \in E_0(p)$ unitario (uno dei due a piacere). A meno di restringere V, il prodotto scalare standard tra v_p e un qualunque vettore non nullo in $E_0(q)$ è non zero. Dunque possiamo definire v_q come l'unico vettore unitario in $E_0(q)$ tale che $\langle v_p, v_q\rangle > 0$. Chiaramente $Jv_q \in E_\lambda(q)$.

Ora, per ogni $q \in V$ sia γ_q la curva integrale su S passante per $q = \gamma_q(0)$ e tale che $\dot{\gamma}_q(t) = v_{\gamma(t)}$. Essa è ben definita in un piccolo intervallo aperto di tempi $t \in (-\varepsilon_q, \varepsilon_q)$ che contiene 0.

Asserzione: γ_q è un segmento.

Essendo v unitario, è sufficiente mostrare che $I(\nabla_{\dot{\gamma}_q}\dot{\gamma}_q, J\dot{\gamma}_q) = 0$, ossia che $I(\nabla_v(v), Jv) = 0$.

Notiamo prima di tutto che $\frac{\partial}{\partial v}(\tilde{N}) = dN(v) = 0$ e che

$$\begin{aligned}\nabla_v(w) =& \frac{\partial}{\partial v}(\tilde{w}) \\ \nabla_{Jv}(w) =& \frac{\partial}{\partial(Jv)}(\tilde{w}) + \lambda I(Jv, w)N.\end{aligned}$$

Consideriamo ora

$$\nabla_v(dN(Jv)) = \nabla_v(\frac{\partial}{\partial(Jv)}\tilde{N}) = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial(Jv)}\tilde{N} = \frac{\partial}{\partial(Jv)}dN(v) = 0$$

e inoltre

$$\begin{aligned}0 &= I(v, \nabla_v(dN(Jv))) = I(v, \nabla_v(\lambda Jv)) = v(\lambda)I(v, Jv) + \lambda I(v, \nabla_v(Jv)) = \\ &= \lambda I(v, \nabla_v(Jv)) = \lambda\,(v \cdot I(v, Jv) - I(\nabla_v(v), Jv)) = \lambda I(\nabla_v(v), Jv)\end{aligned}$$

da cui $I(\nabla_v(v), Jv) = 0$, perché $\lambda \neq 0$ in ogni punto.

Asserzione: La superficie S è rigata.

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon)_u \to V$ la curva integrale (ben definita per $\varepsilon > 0$ piccolo abbastanza) che soddisfa $\alpha(0) = p$ e $\dot{\alpha}(u) = Jv_{\alpha(u)}$. Per ogni $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ sia inoltre $\beta(u) := v_{\alpha(u)} \in T_{\alpha(u)}S$, che possiamo vedere come una applicazione $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$.

Consideriamo $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita come $\varphi(u, s) = \alpha(u) + s\beta(u)$. Per ogni $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, esiste un $\delta > 0$ tale che la restrizione di φ a $(-\varepsilon', \varepsilon') \times (-\delta, \delta)$ è contenuta in S. Inoltre, $(\dot{\alpha}(0), \beta(0)) = (v_p, Jv_p)$ è una base di T_pS e dunque, a meno di scegliere ε', δ piccoli a sufficienza, otteniamo che $\varphi\Big|_{(-\varepsilon', \varepsilon') \times (-\delta, \delta)}$ è un diffeomorfismo da $(-\varepsilon', \varepsilon') \times (-\delta, \delta)$ su un intorno aperto di p in S per il teorema della funzione implicita. Dunque φ è una carta per S intorno a p del tipo desiderato. $\square$