Geometria (Fisica)

Canale D-K

Prova scritta - 30 giugno 2017

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	8	
5	8	
Totale	34	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio generato dai vettori

$$(1,1,-2), \qquad (1,0,-1), \qquad (2,-3,1).$$

Per $t \in \mathbb{R}$, sia

$$v_t := (2,3,-1) + t(1,2,3).$$

Determinare quali v_t sono tali che

$$\langle W, v_t \rangle \neq \mathbb{R}^3.$$

Risoluzione:

Risposta: $\langle W, v_t \rangle \neq \mathbb{R}^3$ se e solo se $v_t = \boxed{}$

Esercizio 2. Siano $\mathbb{K}$ un campo, e V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Siano $f\colon V \to W$ un'applicazione, e

$$\Gamma := \{(v, f(v)) \mid v \in V\} \subset V \oplus W$$

il grafo di f. Si dimostri che f è lineare se e solo se Γ è un sottopsazio vettoriale di $V \oplus W$.

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}^2$ il piano affine, e siano $L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3 \subset \mathbb{A}^2$ le rette di equazioni cartesiane

$L_1 : 2x_1{+}3x_2 = 5, \quad L_2 : x_1{-}x_2 = 0, \quad L_3 : x_1{+}2x_2 = 3, \quad M_1 : x_1 = 3, \quad M_2 : 2x_1{-}x_2 = 1, \quad M_3 : x_1{+}x_3 = 4.$

Esiste o non esiste un'affinità $\phi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che $\phi(L_i) = M_i$?

Risoluzione:

Risposta:

Esiste o non esiste una tale ϕ? **SI** / **NO** (cerchiate la risposta corretta)

Esercizio 4. Sia $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

1. Si determini una base ortogonale (non necessariamente ortonormale) $\mathcal{B}$ in cui la q è diagonale.
2. Si determinino il massimo M e il minimo m di q sulla sfera unitaria, cioè

$$M := \max\{q(x) \mid ||x|| = 1\}, \qquad m := \min\{q(x) \mid ||x|| = 1\}.$$

Risoluzione:

Risposta: $\mathcal{B} = \boxed{}$ $M = \boxed{}$ $m = \boxed{}$

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale, e $p\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che

$$p \circ p = p.$$

1. Dimostrate che $V = \ker p \oplus \operatorname{im} p$.
2. Dimostrate che, se V è finitamente generato, allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(p)$ è una matrice diagonale con entrate sulla diagonale principale appartenenti a $\{0, 1\}$.

Risoluzione: