# Geometria (Fisica)

*Proff. A. De Sole, G. Mondello, K. O'Grady, P. Papi*

## Prova scritta - 13 luglio 2017

*Nome:* ______________________________

*Cognome:* ______________________________

*Numero di matricola:* ______________________________

| Esercizio | Punti totali | Punteggio |
|---|---|---|
| 1 | 6 | |
| 2 | 6 | |
| 3 | 8 | |
| 4 | 6 | |
| 5 | 8 | |
| Totale | 34 | |

*Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà* 0 *punti.*

*Verrà corretto* **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

**Voto/30:** [ ]

**Esercizio 1.** Stabilire quali tra le seguenti funzioni sono applicazioni lineari tra spazi vettoriali:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$;

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = 3x - \pi y$;

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = x + y + xy$.

(d) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $p(x, y) = (\frac{6xy^2+6x+y^3+y}{y^2+1}, y)$.

**Risoluzione**:

---

**Risposta (cerchiare quella corretta):**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a) | Sì / No | (b) | Sì / No |
| | (c) | Sì / No | (d) | Sì / No |

**Esercizio 2.** Sia $W \subset \mathbb{R}^5$ il sottospazio lineare $W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right\}$.

(a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di $W$.

(b) Determinare una base $\mathcal{C}$ dello spazio vettoriale quoziente $\mathbb{R}^5/W$.

**Risoluzione**:

---

**Risposta:** (a) $\mathcal{B} =$ $\boxed{\phantom{xxxxxxxxxx}}$ (b) $\mathcal{C} =$ $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$

**Esercizio 3.** Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B(X,Y) := X^t \cdot A \cdot Y$ la corrispondente forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^2$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$. Costruire, se esiste, un'isometria $f : (\mathbb{R}^2, B) \to (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

**Risoluzione**:

---

**Risposta:** $f$ esiste? Sì / No

(cerchiare quella corretta)

Se sì, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$ $\boxed{\phantom{xxxxxxxxxx}}$

**Esercizio 4.** Sia $M \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ una matrice di rango 4, e sia $T_M : \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare data da

$$T_M(A) := A \cdot M.$$

Determinare il rango di $T_M$.

**Risoluzione**:

---

**Risposta:** Rango di $T_M = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$

**Esercizio 5.** Sia $L_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato alla matrice

$$M := \begin{pmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -10 & 2 & -2 \\ -8 & -2 & 8+t \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare per quali $t$ il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia un autovettore di $L_M$ e calcolarne l'autovalore associato.

(b) Al variare del parametro $t$, determinare rango e segnatura della forma bilineare simmetrica associata a $M$. *[Suggerimento: può essere di aiuto calcolare* $\det(M)$*].*

**Risoluzione**:

---

**Risposta:** (a) $t =$ ☐ Autovalore $=$ ☐

(b) Rango $=$ ☐ Segnatura $=$ ☐