Geometria (Fisica)

Proff. De Sole, Mondello, O'Grady, Papi

Prova scritta - 18 settembre 2017

Nome e Cognome: ____________________

Numero di matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	7	
4	7	
5	8	
Totale	34	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

Esercizio 1. Siano $v_1, v_2, v_3(t), w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ i vettori

$$\begin{aligned} v_1 &= (3,2,1), \\ v_2 &= (1,-1,2), \\ v_3(t) &= (2,t,3+t), \\ w_1 &= (1,1,0), \\ w_2 &= (1,0,1). \end{aligned}$$

Per quali valori di t il sottospazio $V(t) = \langle v_1, v_2, v_3(t) \rangle$ è uguale al sottospazio $W = \langle w_1, w_2 \rangle$?

Risoluzione:

Risposta:

$V(t) = W$ per $t = \boxed{}$

Esercizio 2. Siano A, B le matrici reali 2×2 definite da

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Stabilite se A, B sono diagonalizzabili.

(b) Stabilite se A e B sono coniugate.

Risoluzione:

Cerchiate la risposta corretta:

(a) A è diagonalizzabile? **SÌ** / **NO**; B è diagonalizzabile? **SÌ** / **NO**

(b) A e B sono coniugate? **SÌ** / **NO**

Esercizio 3. Sia $q(X) := X^t \cdot A \cdot X$ la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ associata a

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

Completare $\{e_1\}$ ad una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza q.

Risoluzione:

Risposta: Base $\mathcal{B}$ che diagonalizza q:

Esercizio 4. Considerare lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ dei polinomi reali in t di grado al più 2 e sia $Q : V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da

$$Q(p) := \int_0^1 p(t)p'(t)dt, \qquad \text{dove } p'(t) := \frac{dp}{dt}.$$

(a) Calcolare la matrice che rappresenta la forma bilineare simmetrica g associata a Q rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1,\ t,\ t^2\}$ di V.

(b) Calcolare rango e segnatura di g.

Risoluzione:

Risposta: Matrice che rappresenta g: $\boxed{}$

Rango di g $=$ $\boxed{}$

Segnatura di g $=$ $\boxed{}$

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano euclideo standard con coordinate canoniche (x, y) e sia $\ell \subset \mathbb{R}^2$ la retta affine di equazione $y - 2x = 4$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana della retta affine $r \subset \mathbb{R}^2$ passante per $P = (1, 1)$ e ortogonale a ℓ. Calcolare le coordinate del punto $P' = \ell \cap r$ e la distanza d tra P e P'.

(b) Considerare l'unica isometria affine $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (detta *riflessione ortogonale rispetto a* ℓ) tale che $\rho(Q) = Q$ se e solo se $Q \in \ell$. Determinare una matrice A e un vettore v in modo tale che $\rho(X) = AX + v$ per ogni $X \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione:

Risposta: Equazione di r: $\boxed{}$ $P'=$ $\boxed{}$ $d=$ $\boxed{}$

$A=$ $\boxed{}$ $v=$ $\boxed{}$