Geometria (LT Fisica)

Soluzioni della prova scritta del 7 Febbraio 2016

Esercizio 1. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$V := \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

(a) Date basi di U e V.

(b) Determinate se U e V siano spazi vettoriali isomorfi.

Risoluzione: (a): Riducendo a scala per righe la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \end{bmatrix},$$

che ha per righe le entrate dei generatori di U, otteniamo la matrice a scale per righe

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base di U è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Risolvendo il sistema di equazioni lineari omogenee che definisce V, otteniamo la base di V data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b): Per (a) la dimensione di U è 2, e la dimensione di V è 2. Siccome U e V hanno la stessa dimensione, sono isomorfi.

Esercizio 2. Sia

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}),$$

e supponiamo che $\operatorname{Det} A = 5$. Sia $B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ definita da

$$B := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + a_{13} & a_{12} \\ a_{21} - 3a_{11} & a_{22} + a_{23} - 3a_{12} - 3a_{13} & a_{22} - 3a_{12} \\ a_{31} & a_{32} + a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Calcolate $\operatorname{Det} B$.

Risoluzione: Con una serie di operazioni elementari su righe e colonne di B, si arriva alla matrice A. Ricordiamo che sommare ad una colonna un multiplo di un'altra colonna (oppure sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga) non cambia il determinante, e che scambiare due colonne (oppure scambiare due righe) cambia segno al determinante.
Esplicitamente, sottraendo alla 2^a colonna di B la sua 3^a colonna, si ottiene che

$$\operatorname{Det} B = \operatorname{Det} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} - 3a_{11} & a_{23} - 3a_{13} & a_{22} - 3a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Aggiungendo alla 2^a riga della matrice sopra la sua 1^a riga moltiplicata per 3, otteniamo che

$$\operatorname{Det} B = \operatorname{Det} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Scambiando le ultime due colonne della matrice sopra, vediamo che

$$\operatorname{Det} B = -\operatorname{Det} A = -5.$$

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}^2$ il piano affine euclideo e siano dati i punti $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $P_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Scrivete, nella forma $f(X) = A \cdot X + b$, un'affinità $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che $f(P_i) = P_i'$ per $i = 1, 2, 3$.

(b) Dite se l'affinità f sia una isometria del piano euclideo (rispetto alla distanza euclidea standard).

Risoluzione: (a): Imponendo $A \cdot P_i + b = P_i'$ per $i = 1, 2, 3$ si ottiene come unica soluzione

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b): Sì, perché la matrice A è una matrice ortogonale e dunque

$$\begin{aligned} d(f(Q), f(R)) &= \left\| \overrightarrow{f(Q)f(R)} \right\| = \|f(R) - f(Q)\| = \|(A \cdot R + b) - (A \cdot Q + b)\| = \left\| A \cdot \overrightarrow{QR} \right\| = \\ &= \left\| \overrightarrow{QR} \right\| = d(Q, R) \end{aligned}$$

per ogni $Q, R \in \mathbb{A}^2$.

Esercizio 4. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ data da

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinate $P \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ invertibile e $D \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ diagonale tali che $A = PDP^{-1}$.

Risoluzione: Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6,$$

che ha radici $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$. Una base che diagonalizza A è data da $\mathcal{C} = \{v_1, v_2\}$ dove v_1, v_2 sono autovettori corrispondenti, cioè

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Concludiamo che

$$D = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(L_A) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(L_A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

forniscono una soluzione del problema, dove $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 5. Siano

$$A := \begin{bmatrix} 18 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & 6 \\ -6 & 6 & 5 \end{bmatrix},$$

e $q(X) := X^t \cdot A \cdot X$ l'associata forma quadratica su $\mathbb{R}^3$. Determinate una base ortonormale (per il prodotto scalare euclideo standard su $\mathbb{R}^3$) che diagonalizzi q.

Risoluzione: La forma quadratica q può essere scritta come

$$q(X) = \langle X,\, A \cdot X \rangle$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e la matrice A rappresenta un endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ autoaggiunto per $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Per il teorema spettrale, esiste una base ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ composta di autovettori di L_A.

Il polinomio caratteristico di L_A è

$$P_A(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 35\lambda + 294),$$

e quindi gli autovalori di L_A sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 14, \quad \lambda_3 = 21,$$

ciascuno con molteplicità 1. Autovettori di L_A corrispondenti sono

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortogonale per $\langle \cdot, \cdot \rangle$ che diagonalizza q. Normalizzando, otteniamo la base ortonormale per $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \right\}.$$

che diagonalizza q.