# Geometria (LT Fisica)

*Canale D-K*

# Soluzioni della prova scritta del 28 febbraio 2017

**Esercizio 1.** Siano $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ i vettori definiti da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se i due sottospazi $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ di $\mathbb{R}^4$ siano uguali oppure no (fornendo adeguata motivazione).

**Risoluzione**:

*Notiamo che $w_1, w_2$ non sono nulli né proporzionali, e dunque sono linearmente indipendenti. Ne segue che $\{w_1, w_2\}$ è una base di $W$ e che $W$ ha dimensione 2.*

*Notiamo che $v_1, v_2$ non sono nulli né proporzionali e dunque sono linearmente indipendenti, e che $v_3 = v_2 - 2v_1$. Ne segue che $\{v_1, v_2\}$ è una base di $V$ e che $V$ ha dimensione 2.*

*Riducendo a scala la matrice con colonne $v_1, v_2, w_1, w_2$, si ottiene una matrice di rango 2, il che dimostra che $V + W = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$ ha dimensione 2, da cui concludiamo che $V = W$.*

**Esercizio 2.** Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, si considerino i vettori $v_1(t), v_2(t), w(t) \in \mathbb{R}^3$ definiti da

$$v_1(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ 1-2t \end{pmatrix}, \quad v_2(t) = \begin{pmatrix} 2+t \\ -1 \\ -2+3t \end{pmatrix}, \quad w(t) = \begin{pmatrix} 3-2t \\ t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ i vettori $v_1(t)$ e $v_2(t)$ siano linearmente indipendenti.

(b) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $w(t)$ appartenga al sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $v_1(t)$ e $v_2(t)$.

**Risoluzione**:

(a): *Se $v_1(t), v_2(t)$ sono linearmente dipendenti, allora anche i vettori*

$$\bar{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \end{pmatrix}, \qquad \bar{v}_2(t) = \begin{pmatrix} 2+t \\ -1 \end{pmatrix},$$

*ottenuti proiettandoli sul sottospazio $x_3 = 0$ sono linearmente dipendenti, cioè*

$$\det \begin{pmatrix} 1-t & 1+t \\ 2+t & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

*Tale equazione si può riscrivere come $t^2 + 2t + 3 = 0$. Siccome il discriminante di $t^2 + 2t + 3$ è negativo, l'equazione $t^2 + 2t + 3 = 0$ non ha soluzioni reali, e questo dimostra che $\bar{v}_1(t), \bar{v}_2(t)$ sono linearmente indipendenti per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi $v_1(t), v_2(t)$ sono linearmente indipendenti per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

(b): *Siccome $v_1(t), v_2(t)$ sono linearmente indipendenti per ogni $t \in \mathbb{R}$, il vettore $w(t)$ appartiene a $\langle v_1(t), v_2(t) \rangle$ se e solo se è nullo il determinante della matrice $3 \times 3$ con righe le entrate di $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $w(t)$, cioè se e solo se*

$$\det \begin{pmatrix} 1-t & 1+t & 1-2t \\ 2+t & -1 & -2+3t \\ 3-2t & t & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

*o, equivalentemente, se e solo se $-5t^3 + 4t^2 + 5t = 0$. Dunque, il vettore $w(t)$ appartiene a $\langle v_1(t), v_2(t) \rangle$ se e solo se*

$$t(5t^2 - 4t - 5) = 0,$$

*ossia se e solo se*

$$t \in \left\{ 0, \ \frac{2+\sqrt{29}}{5}, \ \frac{2-\sqrt{29}}{5} \right\}.$$

**Esercizio 3.** Siano $A, B$ le matrici reali $2 \times 2$ definite da

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire se gli endomorfismi $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siano diagonalizzabili.

(b) Stabilire se $A$ e $B$ siano coniugate l'una all'altra.

**Risoluzione**:

*I polinomi caratteristici* $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *e* $p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I)$ *sono uguali, e valgono*

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

*Quindi sia* $A$ *che* $B$ *hanno due autovalori reali distinti, cioè* $\lambda = 2$ *e* $\lambda = 3$*. Segue che sia* $A$ *che* $B$ *sono entrambe diagonalizzabili e, in particolare, sono coniugate alla matrice diagonale*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Siccome la relazione di coniugio* $\sim$ *è transitiva e* $A \sim D \sim B$*, ne segue che* $A$ *è coniugata a* $B$*.*

**Esercizio 4.** Determinare rango e segnatura della forma quadratica $q$ su $\mathbb{R}^{2n+1}$ definita da

$$q(x_1, \ldots, x_{2n+1}) = \sum_{i=1}^{n} x_{2i-1}x_{2i} + x_{2n+1}^2 = x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{2n-1}x_{2n} + x_{2n+1}^2.$$

**Risoluzione**:

*La matrice associata alla forma quadratica $q$ è*

$$Q = \left(\begin{array}{c|c|c|c} H & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & H & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad con \quad H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

*dove il blocco $H$ è ripetuto $n$ volte sulla diagonale.*

*Da un calcolo diretto segue che il polinomio caratteristico di $Q$ è*

$$p_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda I_{2n+1}) = \det(H - \lambda I_2)^n(1-\lambda) = \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)^n (1-\lambda) =$$
$$= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^n \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^n (1-\lambda)$$

*da cui segue che $s_+(q) = n+1$ e $s_-(q) = n$, e quindi $s_0(q) = 0$.*

*Concludiamo che $r(q) = 2n+1$ e $s(q) = s_+(q) - s_-(q) = 1$.*

**Esercizio 5.** Considerare lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ delle matrici reali quadrate $n \times n$ e sia

$$T : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

l'applicazione

$$T(M) := M^t\,.$$

Determinare autovalori e autospazi di $T$. L'endomorfismo $T$ è diagonalizzabile?

**Risoluzione**:

*Poiché* $T \circ T = \mathrm{id}$, *ne segue che gli autovalori di* $T$ *possono essere solo* $1$ *e* $-1$. *Infatti, se* $M$ *è un autovettore per* $T$ *di autovalore* $\lambda$, *allora* $M = (T \circ T)(M) = T(T(M)) = T(\lambda M) = \lambda T(M) = \lambda^2 M$, *da cui* $\lambda^2 = 1$ *e quindi* $\lambda = \pm 1$.

*In particolare,* $V_1$ *consiste delle matrici* $M$ *tali che* $T(M) = M$, *ossia* $M^t = M$. *Dunque* $V_1$ *è il sottospazio delle matrici simmetriche in* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. *D'altra parte,* $V_{-1}$ *consiste delle matrici* $M$ *tali che* $T(M) = -M$, *ossita* $M^t = -M$. *Dunque* $V_{-1}$ *è il sottospazio delle matrici antisimmetriche in* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

*Dato che ogni matrice* $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica (concretamente* $M = S + A$, *dove* $S = \frac{1}{2}(M + M^t)$ *e* $A = \frac{1}{2}(M - M^t)$*), abbiamo che* $V_1 + V_{-1} = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *e dunque* $V_1 \oplus V_{-1} = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *(in quanto* $V_1 \cap V_{-1} = \{0\}$*).*

*Ne segue che esiste una base di autovettori per l'endomorfismo* $T$, *che è quindi diagonalizzabile.*