Geometria (Fisica),

Proff. A. De Sole, G. Mondello, K. O'Grady, P. Papi

Soluzioni della prova di esame del 30 giugno 2017

Esercizio 1. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio generato dai vettori

$$(1, 1, -2), \qquad (1, 0, -1), \qquad (2, -3, 1).$$

Per $t \in \mathbb{R}$, sia

$$v_t := (2, 3, -1) + t(1, 2, 3).$$

Determinare quali v_t sono tali che

$$\langle W, v_t \rangle \neq \mathbb{R}^3.$$

Risoluzione. *Il sottospazio W ha equazione cartesiana*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{1}$$

In particolare, siccome $\dim W = 2$*, vale $\langle W, v_t \rangle \neq \mathbb{R}^3$ se e solo se $v_t \in W$. Per la* (1)*, si ha $v_t \in W$ se e solo se*

$$(2 + t) + (3 + 2t) + (-1 + 3t) = 0,$$

cioè $t = -2/3$*. Quindi $\langle W, v_t \rangle \neq \mathbb{R}^3$ se e solo se*

$$v_t = (4/3, 5/3, -3).$$

Esercizio 2. Siano $\mathbb{K}$ un campo, e V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Siano $f \colon V \to W$ un'applicazione, e

$$\Gamma := \{(v, f(v)) \mid v \in V\} \subset V \oplus W$$

il grafo di f. Si dimostri che f è lineare se e solo se Γ è un sottospazio vettoriale di $V \oplus W$.

Risoluzione. *Supponiamo che f sia lineare, e verifichiamo che Γ è un sottospazio vettoriale di $V \oplus W$. Siccome f è lineare* $f(0) = 0$*, e quindi* $(0, 0) \in \Gamma$*. Ora siano* $(v_1, f(v_1)), (v_2, f(v_2)) \in \Gamma$*. Siccome f è lineare,* $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$*, cioè*

$$(v_1, f(v_1)) + (v_2, f(v_2)) = (v_1 + v_2, f(v_1) + f(v_2)) = (v_1 + v_2, f(v_1 + v_2)) \in \Gamma.$$

Qundi Γ è chiuso per la somma. Analogamente, dati $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(v, f(v)) \in \Gamma$ si ha $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ perchè f è lineare, cioè

$$\lambda(v, f(v)) = (\lambda v, \lambda f(v)) = (v, f(\lambda v)) \in \Gamma.$$

Qundi Γ è anche chiuso per il prodotto per scalari, e perciò è un sottospazio vettoriale di $V \oplus W$. La dimostrazione del viceversa, cioè che se Γ è è un sottospazio vettoriale di $V \oplus W$, allora f è lineare è analoga; si percorre la stessa strada a ritroso.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}^2$ il piano affine reale, e siano $L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3 \subset \mathbb{A}^2$ le rette di equazioni cartesiane

$L_1 : 2x_1{+}3x_2 = 5, \quad L_2 : x_1{-}x_2 = 0, \quad L_3 : x_1{+}2x_2 = 3, \quad M_1 : x_1 = 3, \quad M_2 : 2x_1{-}x_2 = 1, \quad M_3 : x_1{+}x_3 = 4.$

Esiste o non esiste un'affinità $\phi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che $\phi(L_i) = M_i$?
(Suggerimento: disegnate le rette in questione).

Risoluzione. *Non esiste un'affinità* $\phi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ *tale che* $\phi(L_i) = M_i$ *perchè*

$$L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{(1,1)\}, \qquad M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset.$$

Esercizio 4. Sia $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

1. Si determini una base ortogonale (non necessariamente ortonormale) rispetto al prodotto scalare standard, in cui la q è diagonale.
2. Si determinino il massimo M e il minimo m di q sulla sfera unitaria, cioè

$$M := \max\{q(x) \mid ||x|| = 1\}, \qquad m := \min\{q(x) \mid ||x|| = 1\}.$$

Risoluzione. *(1): La matrice associata a q è*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 2\lambda + 6.$$

Le radici del polinomio caratteristico, cioè gli autovalori di A, sono

$$\lambda = 1, \quad \lambda = 2 + \sqrt{10}, \quad \lambda = 2 - \sqrt{10},$$

con autovettori associati

$$v_1 = (-2, 2, 1), \quad v_2 = (\sqrt{10}, 2 + \sqrt{10}, -4), \quad v_3 = (-\sqrt{10}, 2 - \sqrt{10}, -4)$$

rispettivamente. Quindi una base ortogonale in cui la q è diagonale è

$$\mathcal{B} := \{(2, -2, 1),\ (\sqrt{10}, 2 + \sqrt{10}, -4),\ (-\sqrt{10}, 2 - \sqrt{10}, -4)\}.$$

(2): Esiste una base ortonormale $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ *(per esempio ottenuta normalizzando i vettori di $\mathcal{B}$) tale che*

$$f(y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3) = y_1^2 + (2 + \sqrt{10})y_2^2 + (2 - \sqrt{10})y_3^2. \tag{2}$$

Come sappiamo, il massimo M e il minimo m vengono raggiunti da autovettori dell'endomorfismo associato A, cioè vettori della base $\mathcal{C}$. Dunque $M = 2 + \sqrt{10}$ è l'autovalore massimo di A e $m = 2 - \sqrt{10}$ è l'autovalore minimo di A.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale, e $p\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che

$$p \circ p = p.$$

1. Dimostrate che $V = \ker p \oplus \operatorname{im} p$.
2. Dimostrate che, se V è finitamente generato, allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(p)$ è una matrice diagonale con entrate sulla diagonale principale appartenenti a $\{0, 1\}$.

Risoluzione. *(1): Per dimostrare che* $V = \ker p \oplus \operatorname{im} p$*, dobbiamo verificare che*

(a) $\ker p + \operatorname{im} p = V$,

(b) $\ker p \cap \operatorname{im} p = \{0\}$.

Sia $v \in V$*. Allora*

$$v = (v - p(v)) + p(v),$$

e $(v - p(v)) \in \ker p$ *perchè* $p(v - p(v)) = p(v) - p \circ p(v) = p(v) - p(v) = 0$*. Siccome* $p(v) \in \operatorname{im} p$*, abbiamo dimostrato che vale (a). Ora supponiamo che* $v \in \ker p \cap \operatorname{im} p$*. In particolare esiste* $w \in V$ *tale che* $v = p(w)$*. Quindi*

$$0 = p(v) = p(p(w)) = p \circ p(w) = p(w) = v,$$

cioè $v = 0$.

(2): Dato che V *è finitamente generato, i suoi sottospazi* $\ker p$ *e* $\operatorname{im} p$ *hanno dimensione finita: siano* $n := \dim(\ker p)$ *e* $m := \dim(\operatorname{im} p)$*. Sia* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base di* $\ker p$ *e sia* $\{w_1, \ldots, w_m\}$ *una base di* $\operatorname{im} p$*. Poniamo* $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$*. Per (1), la* $\mathcal{B}$ *è una base di* V*.*
Resta da dimostrare che

(a) $p(v_i) = 0$ *per ogni* $i = 1, \ldots, n$,

(b) $p(w_j) = w_j$ *per ogni* $j = 1, \ldots, m$.

La (a) segue dal fatto che $v_i \in \ker p$ *per ogni* $i = 1, \ldots, n$*.*
Per la (b), osserviamo che $w_j \in \operatorname{im} p$ *e dunque esiste* $u_j \in V$ *tale che* $w_j = p(u_j)$*. Ne segue che* $p(w_j) = p(p(u_j) = (p \circ p)(u_j) = p(u_j) = w_j$*.*