Geometria (Fisica),

Proff. A. De Sole, G. Mondello, K. O'Grady, P. Papi

Soluzioni della prova scritta del 13 luglio 2017

Esercizio 1. Stabilire quali tra le seguenti funzioni sono applicazioni lineari tra spazi vettoriali:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$;

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = 3x - \pi y$;

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = x + y + xy$.

(d) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $p(x, y) = (\frac{6xy^2+6x+y^3+y}{y^2+1}, y)$.

Risoluzione:

(a) NO, infatti $f(0) = 1 \neq 0$.

(b) SÌ, infatti $g(\lambda U + \mu V) = g(\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2) = 3(\lambda u_1 + \mu v_1) - \pi(\lambda u_2 + \mu v_2) = \lambda(3u_1 - \pi u_2) + \mu(3v_1 - \pi v_2) = \lambda g(U) + \mu g(V)$*, dove* $U = (u_1, u_2)$ *e* $V = (v_1, v_2)$ *sono vettori di* $\mathbb{R}^2$.

(c) NO, infatti $h(1, 1) = 3$ *e* $h(2, 2) = 8$*, da cui* $h(2, 2) \neq 2h(1, 1)$.

(d) SÌ, infatti $p(x, y) = (6x + y, y)$ *e quindi* $p = L_M$*, dove* M *è la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $W \subset \mathbb{R}^5$ il sottospazio lineare $W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right\}$.

(a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W.

(b) Determinare una base $\mathcal{C}$ dello spazio vettoriale quoziente $\mathbb{R}^5/W$.

Risoluzione:

(a) Una base $\mathcal{B}$ *di* W *è* $\mathcal{B} := \left\{ e_1 + e_2,\ e_3 - e_4 \right\}$.

(b) Una base del quoziente $\mathbb{R}^5/W$ *si ottiene completando* $\mathcal{B}$ *a una base*

$$\left\{ e_1 + e_2,\ e_3 - e_4,\ v_1,\ v_2,\ v_3 \right\}$$

di $\mathbb{R}^5$*, e ponendo* $\mathcal{C} := \{[v_1],\ [v_2],\ [v_3]\}$*. Per esempio, possiamo scegliere*

$$\mathcal{C} = \left\{ [e_1],\ [e_3],\ [e_5] \right\}.$$

Esercizio 3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B(X,Y) := X^t \cdot A \cdot Y$ la corrispondente forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^2$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$. Costruire, se esiste, un'isometria $f : (\mathbb{R}^2, B) \to (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Risoluzione:

Una tale isometria esiste perchè la forma bilineare simmetrica B è definita positiva.
Per definire una isometria f è sufficiente produrre una base ortonormale $\left\{v_1,\ v_2\right\}$ di $(\mathbb{R}^2, B)$, e imporre $f(v_1) = (1,0)$ e $f(v_2) = (0,1)$.
Una base ortonormale per B è $\left\{v_1 = (1,0),\ v_2 = (1,-1)\right\}$. Quindi una tale isometria è data da

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, B) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ (x_1,\ x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2,\ -x_2). \end{array}$$

Esercizio 4. Sia $M \in \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R})$ una matrice di rango 4, e sia $T_M : \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare data da

$$T_M(A) := A \cdot M.$$

Determinare il rango di T_M.

Risoluzione:

Poiché $\mathrm{rg}(T_M) = \dim \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R}) - \dim \ker(T_M) = 25 - \dim \ker(T_M)$, *è sufficiente calcolare* $\dim \ker(T_M)$.
Notiamo che $A \cdot M = 0$ se e solo se $\mathrm{Im}(M) \subseteq \ker(A)$ *e dunque*

$$\ker(T_M) = \left\{ A \in \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathrm{Im}(M) \subseteq \ker(A) \right\}$$

Sia $\left\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\right\}$ una base di $\mathrm{Im}(M)$ *e sia $\mathcal{B} = \left\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5\right\}$ una base di $\mathbb{R}^5$. Ne segue che*

$$\ker(T_M) = \left\{ A \in \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R}) \;\middle|\; [L_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 \end{pmatrix} \right\}$$

Concludiamo che $\dim \ker(T_M) = 5$, *da cui segue* $\mathrm{rg}(T_M) = 25 - 5 = 20$.

Esercizio 5. Sia $L_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato alla matrice

$$M := \begin{pmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -10 & 2 & -2 \\ -8 & -2 & 8+t \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare per quali t il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia un autovettore di L_M e calcolarne l'autovalore associato.

(b) Al variare del parametro t, determinare rango e segnatura della forma bilineare simmetrica associata a M. *[Suggerimento: può essere di aiuto calcolare* $\det(M)$*].*

Risoluzione:

(a) Il vettore $(2, 2, 1)$ *è un autovettore per* M *se e solo se esiste un* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \\ -12+t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo si verifica soltanto per $t = 3$*, e l'autovalore è* $\lambda = -9$*.*

(b) Per calcolare il rango di M*, notiamo che le prime due colonne di* M *sono linearmente indipendenti e dunque* $\mathrm{rg}(M) \geq 2$*.*
Ora, come da suggerimento, calcoliamo il determinante di M*:*

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 5 & -10 & -8 \\ 0 & -18 & -18 \\ -8 & -2 & 8+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 0 & -18 & -18 \\ -8 & -18 & 8+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 0 & -18 & -18 \\ -8 & 0 & 26+t \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 0 & -18 & 0 \\ -8 & 0 & 26+t \end{vmatrix} = -18(66+55t).$$

Ne segue che

$$\mathrm{rg}(M) = \begin{cases} 3 & \text{se } t \neq -66/5 \\ 2 & \text{se } t = -66/5. \end{cases}$$

Per determinare la segnatura di M*, notiamo che per ogni valore di* t *abbiamo*

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 > 0$ *e dunque* $n_+(M) \geq 1$,
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -13 < 0$ *e dunque* $n_-(M) \geq 1$.

Per $t = -66/5$*, abbiamo anche* $n_0(M) \geq 1$*.*
Per $t < -66/5$*, abbiamo* $\det(M) > 0$ *e dunque* $n_0(M) = 0$ *e* $n_-(M)$ *è pari.*
Per $t > -66/5$*, abbiamo* $\det(M) < 0$ *e dunque* $n_0(M) = 0$ *e* $n_-(M)$ *è dispari.*
Concludiamo che la segnatura $\sigma(M)$ *di* M *è*

$$\sigma(M) = n_+(M) - n_-(M) = \begin{cases} -1 & \text{se } t < -66/5 \\ 0 & \text{se } t = -66/5 \\ 1 & \text{se } t > -66/5. \end{cases}$$