

# Geometria (Fisica, Canale A-C),

Proff. A. De Sole, G. Mondello, K. O'Grady, P. Papi

## Soluzioni della prova di esame del 18 settembre 2017

**Esercizio 1.** Siano  $v_1, v_2, v_3(t), w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$  i vettori

$$\begin{aligned}v_1 &= (3, 2, 1), \\v_2 &= (1, -1, 2), \\v_3(t) &= (2, t, 3+t), \\w_1 &= (1, 1, 0), \\w_2 &= (1, 0, 1).\end{aligned}$$

Per quali valori di  $t$  il sottospazio  $V(t) = \langle v_1, v_2, v_3(t) \rangle$  è uguale al sottospazio  $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ ?

**Risoluzione:**

*Non essendo proporzionali,  $v_1$  e  $v_2$  sono linearmente indipendenti. D'altra parte,*

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & t \\ 1 & 2 & 3+t \end{pmatrix} = -10t - 5.$$

*Ne segue che*

$$\dim V(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t = -\frac{1}{2} \\ 3 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

*Dunque, se  $t \neq -\frac{1}{2}$ , sicuramente  $V(t) \neq W$ . D'altra parte, per  $t = -\frac{1}{2}$  abbiamo*

$$V(-1/2) = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\} = W.$$

*Quindi  $V(t) = W$  se e solo se  $t = -\frac{1}{2}$ .*

**Esercizio 2.** Siano  $A, B$  le matrici reali  $2 \times 2$  definite da

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Stabilite se  $A, B$  sono diagonalizzabili.
- (b) Stabilite se  $A$  e  $B$  sono coniugate.

**Risoluzione:**

*(a) I polinomi caratteristici di  $A$  e  $B$  sono, rispettivamente*

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 2, \quad p_B(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 2.$$

Siccome entrambi i polinomi caratteristici hanno radici distinte,  $A$  e  $B$  sono diagonalizzabili.

(b) Se  $A$  e  $B$  fossero coniugate, i loro polinomi caratteristici sarebbero uguali. Siccome  $p_A \neq p_B$ , le matrici  $A$  e  $B$  non sono coniugate.

**Esercizio 3.** Sia  $q(X) := X^t \cdot A \cdot X$  la forma quadratica su  $\mathbb{R}^3$  associata a

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

Completare  $\{e_1\}$  ad una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$  che diagonalizza  $q$ .

**Risoluzione:**

Per costruire una tale base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ , iniziamo ponendo  $v_1 := e_1$  e calcoliamo

$$e_1^\perp = \{x_1 + 2x_2 = 0\} = \text{span}(e_3, -2e_1 + e_2)$$

dove stiamo denotando con  $\perp$  l'ortogonale rispetto alla forma bilineare simmetrica associata a  $q$  (la polarizzazione di  $q$ ).

Come secondo vettore  $v_2$  possiamo scegliere un qualunque vettore non isotropo in  $e_1^\perp$ , per esempio  $e_3$ .

Non resta che scegliere come  $v_3$  un vettore non nullo di  $\text{span}(v_1, v_2)^\perp = \{x_1 + 2x_2 = -2x_2 + 5x_3 = 0\}$ , per esempio  $v_3 := 10e_1 - 5e_2 - 2e_3$ .

Segue che una base che diagonalizza  $q$  è data da  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ .

**Esercizio 4.** Considerare lo spazio vettoriale  $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$  dei polinomi reali in  $t$  di grado al più 2 e sia  $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$  la forma quadratica definita da

$$Q(p) := \int_0^1 p(t)p'(t)dt, \quad \text{dove } p'(t) := \frac{dp}{dt}.$$

- Sia  $g$  la forma bilineare simmetrica associata a  $Q$  (la polarizzazione di  $Q$ ): calcolare la matrice che rappresenta  $g$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$  di  $V$ .
- Calcolare rango e segnatura di  $g$ .

**Risoluzione:**

(a) La  $g$  è data da

$$g(p, q) = \frac{1}{2} \int_0^1 (p(t)q'(t) + p'(t)q(t))dt = \frac{1}{2} [p(t) \cdot q(t)]_0^1 = \frac{1}{2} (p(1) \cdot q(1) - p(0) \cdot q(0)).$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice  $M_{\mathcal{B}}(g)$  ha evidentemente rango 2, e il suo nucleo è generato dal polinomio  $t - t^2$ . Siccome il polinomio 1 è isotropo per  $Q$ , e non appartiene al nucleo di  $g$ , segue che la segnatura di  $g$  è 0.

Riassumendo:  $\boxed{r(g) = 2, s(g) = 0}$ .

**Esercizio 5.** Sia  $\mathbb{R}^2$  il piano euclideo standard con coordinate canoniche  $(x, y)$  e sia  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  la retta affine di equazione  $y - 2x = 4$ .

- (a) Determinare l'equazione cartesiana della retta affine  $r \subset \mathbb{R}^2$  passante per  $P = (1, 1)$  e ortogonale a  $\ell$ . Calcolare le coordinate del punto  $P' = \ell \cap r$  e la distanza  $d$  tra  $P$  e  $P'$ .
- (b) Considerare l'unica isometria affine  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (detta *riflessione ortogonale rispetto a  $\ell$* ) tale che  $\rho(Q) = Q$  se e solo se  $Q \in \ell$ . Determinare una matrice  $A$  e un vettore  $v$  in modo tale che  $\rho(X) = AX + v$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^2$ .

**Risoluzione:**

(a) La giacitura  $\vec{\ell}$  di  $\ell$  è generata da  $v = (1, 2)$ . La giacitura  $\vec{r}$  di  $r$  è generata da un qualsiasi vettore non nullo ortogonale a  $v$ , per esempio  $n = (-2, 1)$ . Quindi  $r$  ha equazioni parametriche  $x = -2t + 1$ ,  $y = 1 + t$ , ed equazione cartesiana  $\boxed{x + 2y = 3}$ .

Con un calcolo diretto troviamo  $\boxed{\ell \cap r = P' = (-1, 2)}$  e quindi  $\boxed{d = \|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{5}}$ .

(b) Siano  $v$  e  $n$  come in (a). Allora  $A$  deve soddisfare  $Av = v$  e  $An = -n$ , ossia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Inoltre, il punto  $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in \ell$  è fissato da  $\rho$  e dunque  $\rho\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) + v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  implica

$$v = (I - A)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{8}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Concludendo,  $\boxed{A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \frac{8}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ .