LT in Fisica - Anno accademico 2016/2017

Geometria

Foglio 1 di esercizi - 7 ottobre 2016

(consegna giovedì 13 ottobre 2016)

Esercizio 1. Si considerino i seguenti quattro insiemi:

$$A = \{X, Y\}\ ,\quad B = \{\{X\}, \{Y\}\}\ ,$$
$$C = \{\{X\}, \{X, Y\}\}\ ,\quad D = \{\{X\}, \{Y\}, \{X, Y\}\}\ .$$

Per ognuna delle seguenti affermazioni, dire se sia vera o falsa:

(i) $B \subset C$	(ii) $B \cup C = D$	(iii) $A \subset D$
(iv) $A \subset C$	(v) $A = B$	(vi) $A \in C$
(vii) $B \in D$	(viii) $A \subset (D \setminus B)$.	

(Si indica con $D \setminus B$ l'insieme contenente gli elementi di D che non appartengano a B.)

Esercizio 2. Sia $g\colon R \to S$ una funzione.
Siano $R_1, R_2 \subset R$ sottoinsiemi di R e siano $S_1, S_2 \subset S$ sottoinsiemi di S.

(i) Dimostrare che $g(R_1 \cup R_2) = g(R_1) \cup g(R_2)$ e $g(R_1 \cap R_2) \subset g(R_1) \cap g(R_2)$.
(ii) Trovare un esempio in cui $g(R_1 \cap R_2) \neq g(R_1) \cap g(R_2)$.
(iii) Dimostrare che, se g è iniettiva, allora $g(R_1 \cap R_2) = g(R_1) \cap g(R_2)$.
(iv) Dimostrare che $g^{-1}(S_1 \cap S_2) = g^{-1}(S_1) \cap g^{-1}(S_2)$ e $g^{-1}(S_1 \cup S_2) = g^{-1}(S_1) \cup g^{-1}(S_2)$.
(v) Dimostrare che $g^{-1}(g(R_1)) \supset R_1$ e trovare un esempio in cui $g^{-1}(g(R_1)) \neq R_1$.
(vi) Dimostrare che $g(g^{-1}(S_1)) \subset S_1$ e trovare un esempio in cui $g(g^{-1}(S_1)) \neq S_1$.

Esercizio 3. Siano $p, q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ le funzioni

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{q} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{p} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & [x] \end{array}$$

dove la *parte intera* $[x]$ di x è il *massimo* $n \in \mathbb{Z}$ tale che $n \leq x$.

(i) Dire se p, q siano iniettive. Dire se siano suriettive.
(ii) Verificare che $p \circ q \neq q \circ p$.

Esercizio 4. Siano $\mathscr{R}, \mathscr{S}, \mathscr{T}$ le relazioni sull'insieme $\mathbb{R}$ definite come segue:

(i) dati $x, y \in \mathbb{R}$, dichiariamo $x\mathscr{R}y$ se $2x = -2y$.
(ii) dati $x, y \in \mathbb{R}$, dichiariamo $x\mathscr{T}y$ se $x^2 - 2|xy| + y^2 = 0$.
(iii) dati $x, y \in \mathbb{R}$, dichiariamo $x\mathscr{S}y$ se $x + 3x^2 + 7x^3 = y + 3y^2 + 7y^3$.

Determinare quali tra $\mathscr{R}, \mathscr{S}, \mathscr{T}$ siano relazioni di equivalenza.

Esercizio 5.

(i) Calcolare (ossia scrivere nella forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$) l'inverso di $z = 4 - 3i$ e di $w = 3 + \sqrt{2}i$.
(ii) Rappresentare il numero complesso $z = \sqrt{3} + i$ in coordinate polari
(ossia come $z = \rho e^{i\theta}$ con modulo $\rho \geq 0$ e argomento $0 \leq \theta < 2\pi$).
(iii) Determinare quale numero complesso abbia coordinate polari $\rho = \frac{1}{2}$ e $\theta = \frac{3}{2}\pi$.
(iv) Calcolare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 = 3 - 3i$.

Esercizio 6. Dimostrare per induzione l'enunciato seguente:

$$\boxed{\text{per ogni intero } n \geq 1, \text{ vale } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

dove il simbolo $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ significa $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$.
