LT in Fisica - Anno accademico 2016/2017

# Geometria

Foglio 2 di esercizi - 14 ottobre 2016
(consegna giovedì 20 ottobre 2016)

---

**Esercizio 1.** Sia $\mathbb{K}$ il campo reale $\mathbb{R}$ o quello complesso $\mathbb{C}$. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $V$ siano $\mathbb{K}$-sottospazi vettoriali di $V$.

(a) I sottospazi $W_i$ di $V := \mathbb{K}^3$ definiti come:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; x_1, x_3 \in \mathbb{K} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; x_1, x_3 \in \mathbb{K} \right\},$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array} \right\}, \quad W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \right\},$$

$$W_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_3 = x_3^2 \end{array} \right\}.$$

(b) I sottospazi $Z_j$ di $V := \mathbb{K}[t]_{\leq n} = \{p \text{ polinomio in } t \text{ di grado al più } n \text{ oppure nullo}\}$ con $n \geq 2$ definiti come:

$$\begin{array}{ll} Z_1 = \{p \in V \mid \deg(p) = n-1\} \cup \{0\}, & Z_2 = \{p \in V \mid p(0) = 0,\ p(1) = 1\}, \\ Z_3 = \{p \in V \mid \deg(p) \geq n-1\} \cup \{0\}, & Z_4 = \{p \in V \mid p(5) = 0\}, \\ Z_5 = \{p \in V \mid p = t \cdot p'\}, & Z_6 = \{p \in V \mid p(0) = 0,\ p'(1) = 0\} \end{array}$$

dove $p' = \frac{dp}{dt}$ e $\deg(p)$ è il grado del polinomio $p$.

---

**Esercizio 2.** Nell'esercizio 1(a) si determinino basi per i sottoinsiemi $W_i$ di $V$ che sono sottospazi.
Lo stesso si faccia per i sottoinsiemi $Z_j$ di $V$ nell'esercizio 1(b), ove si sia posto $n = 3$.

---

**Esercizio 3.** Sia $V$ uno spazio vettoriale e $U_1, U_2$ sottospazi di $V$.
Dimostrare che $U_1 \cup U_2$ è un sottospazio di $V$ se e solo se $U_1 \subset U_2$ oppure $U_2 \subset U_1$.

---

**Esercizio 4.** Un insieme (non necessariamente finito) di vettori $A$ di uno spazio vettoriale si dice *indipendente* se per ogni sottoinsieme proprio $B \subsetneq A$, risulta $\langle B \rangle \neq \langle A \rangle$.
Dimostrare che $A$ è indipendente se e solo se ogni sottoinsieme finito di vettori di $A$ è linearmente indipendente.

---