LT in Fisica - Anno accademico 2016/2017

Geometria

Foglio 3 di esercizi - 21 ottobre 2016
(consegna giovedì 27 ottobre 2016)

Ricordiamo che, se V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, l'applicazione

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow V$$

definita come $f(a_1, \dots, a_n) := a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$ è biunivoca. Denotiamo con

$$X_{\mathscr{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

l'inversa di f, che quindi associa a $v \in V$ il vettore $X_{\mathscr{B}}(v) \in \mathbb{K}^n$ delle coordinate di v rispetto alla base $\mathscr{B}$.

Esercizio 1. Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ i vettori

$$v_1 = (2,3), \qquad v_2 = (3,5).$$

(1) Dimostrate che $\mathscr{B} := \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.
(2) Determinate le coordinate di $(1,0)$ nella base $\mathscr{B}$, cioè il vettore $X_{\mathscr{B}}((1,0))$.

Esercizio 2. Se V è uno spazio vettoriale complesso (cioè il campo degli scalari è $\mathbb{C}$), allora è anche uno spazio vettoriale reale, perchè $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

(1) Quale è la dimensione di $\mathbb{C}^n$ come spazio vettoriale reale?
(2) Quale è la dimensione di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale reale?
(3) Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n.
Qual è la dimensione di V come spazio vettoriale reale?

Esercizio 3. Ricordiamo che l'insieme $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ i cui elementi sono i polinomi reali di grado al più d (includiamo anche il polinomio zero) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

(1) Dimostrate che $\mathscr{B} := \Big\{1,\ 1+x,\ (1+x)^2\Big\}$ è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
(2) Trovate le coordinate del vettore 1, del vettore x e del vettore x^2 nella base $\mathscr{B}$, cioè

$$X_{\mathscr{B}}(1), X_{\mathscr{B}}(x), X_{\mathscr{B}}(x^2) \in \mathbb{R}^3.$$

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale su k, finitamente generato, di dimensione n. Per $a \in k$, sia $W(a) \subset V \oplus V$ il sottoinsieme definito da

$$W(a) := \Big\{(v, av) \in V \oplus V \;\Big|\; v \in V\Big\}.$$

Dimostrate che $W(a)$ è un sottopsazio, e calcolate la sua dimensione.

Esercizio 5. Sia $W := \langle (1,2,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$, e siano

$$v_1 := (2,0,3), \quad v_2 := (-1,2,-4), \quad v_3 := (1,0,0).$$

Dimostrate che:

(1) $\Big\{[v_1],[v_2]\Big\}$ *non è* una base dello spazio quoziente $\mathbb{R}^3/W$.
(2) $\Big\{[v_1],[v_3]\Big\}$ è una base dello spazio quoziente $\mathbb{R}^3/W$.
