LT in Fisica - Anno accademico 2016/2017

Geometria

Foglio 4 di esercizi - 28 ottobre 2016
(consegna giovedì 3 novembre 2016)

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato (su un campo $\mathbb{K}$) e siano U e W sottospazi di V. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(i) $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.
(ii) Esistono una base $(u_1, \dots, u_m)$ di U ed una base $(w_1, \dots, w_n)$ di W tali che la lista $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$ sia una base di V.
(iii) Date comunque una base $(u_1, \dots, u_m)$ di U ed una base $(w_1, \dots, w_n)$ di W, la lista $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$ è una base di V.

Far vedere, con un esempio, che le condizioni precedenti NON sono equivalenti alla seguente:

(iv) Qualunque base di V è del tipo $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$, dove $(u_1, \dots, u_m)$ è una base di U e $(w_1, \dots, w_n)$ è una base di W.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, sia $U \subset V$ un suo sottospazio, e si consideri lo spazio quoziente V/U. Sia $(u_1, \dots, u_m)$ una base di U e siano $v_1, \dots, v_n$ vettori di V.
Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se si tratta di un'affermazione vera (fornendone una dimostrazione) o falsa (fornendone un controesempio).

(a) $([v_1], \dots, [v_n])$ è una base di V/U se e solo se $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$ è una base di V.
(b) Se $v_1, \dots, v_n$ generano V, allora $[v_1], \dots, [v_n]$ generano V/U.
(c) Se $[v_1], \dots, [v_n]$ generano V/U, allora $v_1, \dots, v_n$ generano V.
(d) Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti in V, allora $[v_1], \dots, [v_n]$ sono linearmente indipendenti in V/U.
(e) Se $[v_1], \dots, [v_n]$ sono linearmente indipendenti in V/U, allora $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti in V.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 2 sullo spazio vettoriale V. Sia $O \in \mathbb{A}$ e sia $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ una base di V. Consideriamo i punti $P(4,3), Q(1,1)$ di $\mathbb{A}$ nel $RA(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$.
Scrivete equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per P e Q.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 2 sullo spazio vettoriale V e sia $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento affine per $\mathbb{A}$. Nel $RA(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ siano $r, r' \subset \mathbb{A}$ le rette di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = s \\ y = 1 - 3s \end{cases}$$

rispettivamente. Determinate le coordinate nel $RA(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ del punto d'intersezione tra r e r'.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3 sullo spazio vettoriale V e sia $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento affine per $\mathbb{A}$. Nel $RA(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ siano $P(1,-1,-1)$, $Q(2,0,0)$ e $R(1,0,2)$ punti di $\mathbb{A}$.

(1) Verificate che P, Q, R *non* sono allineati e quindi appartengono a un unico piano $\Lambda \subset \mathbb{A}$.
(2) Determinate equazioni parametriche e cartesiane per Λ.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3 sullo spazio vettoriale V e sia $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento affine per $\mathbb{A}$. Nel $RA(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ siano r, r' le rette di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t \\ z = 5t - 2 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = s \\ y = s - 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

rispettivamente. Determinate una equazione cartesiana del piano $\Lambda \subset \mathbb{A}$ contenente r e parallelo a r'.

Esercizio 7 (Opzionale)**.** Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sul campo k, con spazio vettoriale associato V.

(1) Siano $\mathbb{B}$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}$, e $v \in V$. Si dimostri che $T_v(\mathbb{B})$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$, con giacitura uguale a quella di $\mathbb{B}$.
(2) Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale, e sia Σ_W l'insieme dei sottospazio affini $\mathbb{B}$ di $\mathbb{A}$, con giacitura uguale a W. Si dimostri che le traslazioni di $\mathbb{A}$ danno a Σ_W una struttura di spazio affine con spazio vettoriale associato il quoziente V/W.