LT in Fisica - Anno accademico 2016/2017

Geometria

Foglio 5 di esercizi - 4 novembre 2016
(consegna giovedì 10 novembre 2016)

Esercizio 1. Siano V, W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Data un'applicazione $f\colon V \to W$, il *grafico* di f è il sottoinsieme Γ_f di $V \oplus W$ dato da

$$\Gamma_f := \{(v, w) \in V \oplus W \mid w = f(v)\}.$$

Dimostrate che f è lineare se e solo se Γ_f è un sottospazio vettoriale di $V \oplus W$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x di grado al più 2 a coefficienti reali. Determinate se esiste o non esiste un'applicazione lineare di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali

$$f\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tale che

$$f(x - x^2) = (1, 0, 0), \quad f(x + x^2) = (1, 1, 0), \quad f(3x - x^2) = (1, 0, 0).$$

Esercizio 3. L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi può essere dotato, con le usuali operazioni di somma e prodotto, di una struttura di spazio vettoriale sia sul campo $\mathbb{C}$ che sul campo $\mathbb{R}$. Sia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$$

la coniugazione complessa. Verificate che

(1) f **è** un'applicazione lineare di spazi vettoriali reali.
(2) f **non è** un'applicazione lineare di spazi vettoriali complessi.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{K}$ un campo e $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *distinti*. Dimostrate che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x]_{\leq n} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ p & \mapsto & (p(\alpha_0), \ldots, p(\alpha_n)) \end{array}$$

è suriettiva. (In altre parole, possiamo assegnare arbitrariamente i valori di un polinomio di grado al più n su $(n + 1)$ elementi distinti di $\mathbb{K}$.)

Esercizio 5. Siano U, V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

(1) Siano $f\colon U \to V$ e $g\colon W \to V$ applicazioni lineari. Dimostrate che

$$\begin{array}{ccc} U \oplus W & \xrightarrow{\varphi} & V \\ (u, w) & \mapsto & f(u) + g(w) \end{array}$$

è lineare.

(2) Siano $h\colon V \to U$ e $l\colon V \to W$ applicazioni lineari. Dimostrate che

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi} & U \oplus W \\ v & \mapsto & (h(v), l(v)) \end{array}$$

è lineare.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 2 sullo spazio vettoriale V e siano r_1, r_2 rette incidenti distinte in $\mathbb{A}$, con punto di intersezione P. Siano Q_1, R_1 punti di r_1 e Q_2, R_2 punti di r_2 distinti da P, in modo tale che $\overrightarrow{PR_1} = \lambda_1 \overrightarrow{PQ_1}$ e $\overrightarrow{PR_2} = \lambda_2 \overrightarrow{PQ_2}$ per opportuni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Dimostrate che le rette $\overline{Q_1Q_2}$ e $\overline{R_1R_2}$ sono parallele se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2$.
