LT in Fisica - Anno accademico 2016/2017

Geometria

Foglio 6 di esercizi - 11 novembre 2016
(consegna venerdì 18 novembre 2016)

Esercizio 1. Sia $W = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0\}$. Determinare una base di $\mathbb{R}^4/W$.

Esercizio 2. Scelta una matrice 2×2 reale fissata T, sia

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\varphi_T} & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A \cdot T \end{array}$$

(1) Verificate che φ_T è lineare.
(2) Determinate se è vero o falso che *ogni* applicazione lineare $f\colon \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ è uguale a φ_T per una certa matrice $T \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.
(a) Siano $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali tali che $V = U \oplus W$ e sia $p : V \to V$ definita come $p(u + w) := u$ per ogni $u \in U$ e $w \in W$.
Dimostrare che p è lineare e che $p \circ p = p$. Determinare $\ker(p)$ e $\operatorname{im}(p)$.
(b) Sia $p : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $p \circ p = p$. Dimostrare che $V = \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p)$.

Ricordiamo che, se $G : V \to W$ è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali, $\mathscr{B}$ è una base di V e $\mathscr{C}$ è una base di W, la matrice che rappresenta G rispetto alle basi <u>ordinate</u> $\mathscr{B}$ del dominio e $\mathscr{C}$ del codominio si indica con $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(F)$.
Per abuso di notazione, invece che $\mathscr{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ spesso si scrive $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ pur sottointendendo che la base $\mathscr{B}$ è ordinata e il suo vettore i-esimo è v_i.

Esercizio 4. Sia

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata ad A. Sia $\mathscr{B}$ la base di $\mathbb{R}^2$ data da $\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
(1) Calcolate $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(L_A)$.
(2) Calcolate $L_{A^n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in t a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2.
(1) Verificare che $\mathscr{C} = \{1 + t,\ 1 - t,\ t + t^2\}$ è una base di V.
(2) Sia $F : V \to V$ l'operatore lineare individuato dalle condizioni seguenti

$$F(1 + t) = 1 + 2t + t^2, \quad F(1 - t) = 1 - t^2, \quad F(t + t^2) = 1 + t.$$

Sia $\mathscr{B} = \{1,\ t,\ t^2\}$. Si scrivano le matrici $M^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}}(F)$, $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(F)$, $M^{\mathscr{C}}_{\mathscr{C}}(F)$.

Esercizio 6. Siano U, V, W spazi vettoriali finitamente generati sul campo $\mathbb{K}$ e siano $f : V \to U$ e $g : V \to W$ applicazioni lineari.
Dimostrare che $\ker(f) \subset \ker(g)$ se e solo se esiste un'applicazione lineare $h : U \to W$ tale che $g = h \circ f$.
