LT in Fisica - Anno accademico 2016/2017

Geometria

Foglio 8 di esercizi - 25 novembre 2016
(consegna giovedì 1 dicembre 2016)

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimentione n e sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f \circ f = \mathrm{Id}_V$. Sia inoltre $k = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_V))$.

(a) Dimostrare che $\mathrm{rg}(f) = n$.

(b) Dimostrare che esiste una base $\mathscr{B}$ di V per la quale $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f)$ è della forma (a blocchi)

$$M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1_{k\times k} & 0_{k\times(n-k)} \\ \hline 0_{(n-k)\times k} & -1_{(n-k)\times(n-k)} \end{array}\right),$$

dove $0_{m\times r}$ indica la matrice nulla $m \times r$, mentre $1_{m\times m}$ indica la matrice unità $m \times m$.

Esercizio 2. Determinare, al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$, quando i seguenti sistemi ammettono soluzioni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e quando la soluzione è unica.

$$(a) \begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + az = 5 \\ 3x - 4y + 5z = b \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y + a^3 z = 3 \\ x + y + z = b \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} (1 + a)x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + (1 + a)y + 2z = 1 \\ (1 - a)x - y + z = b \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} (1 + a)x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + (1 + a)y + 2z = b \\ x - y + az = a + 1. \end{cases}$$

Esercizio 3. Verificare che le matrici reali $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sono simili, ovvero esiste una matrice invertibile $P \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $B = PAP^{-1}$. Più in generale dimostrare che ogni matrice $A = (a_{ij})^n_{i,j=1} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ è simile alla matrice $B = (b_{ij})^n_{i,j=1}$ ottenuta per "rotazione di 180°", ossia $b_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}$.

Esercizio 4. Mostrare che per ogni $0 \neq a \in \mathbb{R}$ le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ reali sono simili per coniugio, ovvero esiste una matrice invertibile $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $B = PAP^{-1}$.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio affine $\mathbb{A} = P + U$ dove

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Trovare equazioni cartesiane per $\mathbb{A}$, ovvero descrivere $\mathbb{A}$ come l'insieme delle soluzioni $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ di un sistema di equazioni lineari (non omogenee) nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4.

Esercizio 6. Siano $\mathbb{A}$ un piano affine (ossia uno spazio affine di dimensione 2) e $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2 \subset \mathbb{A}$ due rette (sottospazi affini di dimensione 1). Sia $\mathbb{L} \subset \mathbb{A}$ una retta che *non* è paralella a $\mathbb{L}_1$ né a $\mathbb{L}_2$.

(a) Dimostrate che dato $P \in \mathbb{L}_1$ l'unica retta parallela a $\mathbb{L}$ contenente P incontra $\mathbb{L}_2$ in un unico punto.

(b) Per il punto (a) possiamo definire $F\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ associando a $P \in \mathbb{L}_1$ l'intersezione di $\mathbb{L}_2$ con l'unica retta parallela a $\mathbb{L}$ contenente P. Dimostrate che F è un isomorfismo affine.

Esercizio 7. Siano $\mathbb{A}$ uno spazio affine e $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità. Un *punto fisso* per F è un $P \in \mathbb{A}$ tale che $F(P) = P$. Il luogo dei punti fissi $\mathrm{Fix}(F) \subset \mathbb{A}$ è l'insieme dei punti fissi per F.

(a) Dimostrate che, se $\mathrm{Fix}(F)$ è non vuoto, allora $\mathrm{Fix}(F)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$.

(b) Per ogni $0 \leq m \leq n$ esibire un esempio di $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ con $\dim \mathbb{A} = n$ e $\dim(\mathrm{Fix}(F)) = m$.
