LT in Fisica - Anno accademico 2016/2017

Geometria

Foglio 9 di esercizi - 2 dicembre 2016

(consegna venerdì 9 dicembre 2016)

Esercizio 1. Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, considerare la matrice

$$N_t = \begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ t & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}).$$

(a) Calcolare $\det(N_t)$ e dire se N_t sia invertibile.
(b) Calcolare l'inversa di N_0 usando il metodo di Gauss.

Esercizio 2. Per ogni $n \geq 2$, calcolare il determinante della matrice

$$M = \begin{pmatrix} a+b & b & \cdots & b & b \\ b & a+b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a+b & b \\ b & b & \cdots & b & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

(Suggerimento: usare operazioni sulle colonne per semplificare il calcolo.)

Esercizio 3. Considerare i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 16 \end{pmatrix},\ w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

e siano $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathscr{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$.

(a) Verificare che $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ siano basi di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare la matrice di cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{C}$.

Esercizio 4. Per ogni $n \geq 1$ sia $C_n \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ la matrice definita da

$$(C_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che $\det(C_n) = n + 1$ per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 5. Calcolare il determinante dell'applicazione $F : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ definita come $F(p)(t) := p'(t-1)$, dove $p' = \frac{dp}{dt}$.

Esercizio 6. Sia $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_{23} \\ c_{31} \\ c_{12} \end{pmatrix}, \qquad \text{dove } c_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che l'applicazione $\wedge$ è multilineare e alternante.
(b) Calcolare $e_i \wedge e_j$, dove $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(c) Dimostrare che $u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$.
