LT in Fisica - Anno accademico 2016/2017

Geometria

Foglio 10 di esercizi - 9 dicembre 2016

(consegna venerdì 16 dicembre 2016)

Esercizio 1. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$V = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Sia $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ definita così:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & -8 \\ -4 & -1 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificate che $L_A(V) \subset V$.

(b) Sia $f : V \to V$ definita come $f(X) := A \cdot X$.
Calcolate $\mathrm{Det}(f)$ seguendo la definizione di $\mathrm{Det}(f)$.

(c) Notate che $L_A(1,1,1) = (-6,-6,-6)$. Calcolate $\mathrm{Det}(A)$ e usate questo calcolo per (ri)determinare $\mathrm{Det}(f)$.

[Suggerimento: pensate di calcolare $\mathrm{Det}(A)$ *scegliendo una base di* $\mathbb{R}^3$ *il cui primo vettore è* $(-6,-6,-6)$ *e gli altri formano una base di ...]*

Esercizio 2. Sia $\sigma \in \mathscr{S}_n$ la permutazione di $\{1,2,\ldots,n\}$ definita da

$$\sigma(i) := \begin{cases} i+1 & \text{se } 1 \le i \le n-1, \\ 1 & \text{se } i = n. \end{cases}$$

Calcolate il segno di σ.

Terminologia.
Un'applicazione lineare $f : V \to V$ da uno spazio vettoriale V in sé si dice anche *endomorfismo.*
Un endomorfismo $f : V \to V$ si dice *singolare* se non è invertibile.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato sul campo $\mathbb{K}$, di dimensione n. Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo.

(1) Dimostrate che esistono al più n valori di $s \in \mathbb{K}$ tali che l'endomorfismo $\mathrm{Id}_V + s \cdot f$ sia singolare.

(2) Dimostrate che esistono al più n valori di $t \in \mathbb{K}$ tali che l'endomorfismo $t \cdot \mathrm{Id}_V + f$ sia singolare.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.
Calcolate il determinante $\mathrm{Det}(\mathcal{V}_n)$ della matrice seguente

$$\mathcal{V}_n := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}).$$

[Suggerimento: iniziate con $n=2$, $n=3$.*]*
