LT in Fisica - Anno accademico 2016/2017

Geometria

FOGLIO 11 DI ESERCIZI - 18 DICEMBRE 2016
(consegna venerdì 13 gennaio 2016)

Notazioni. Negli esercizi seguenti V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ di dimensione finita. Se $F \in \mathrm{Bil}_+(V)$ e $U \subset V$, denotiamo con $U^\perp$ l'ortogonale di U rispetto a F. Ricordiamo che $\ker(F) := V^\perp$.

Se $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ è una matrice quadrata, la sua *traccia* è definita come la somma delle entrate sulla diagonale principale, ossia

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \ \in \mathbb{K}.$$

Esercizio 1. Si considerino $t \in \mathrm{Q}(\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}))$, $r \in \mathrm{Q}(\mathbb{R}[t]_{\leq 2})$, definite da

$$t(A) := \mathrm{tr}(A)^2, \quad r\big(p\big) := p(2)^2 - p(0)^2.$$

(a) Determinare le forme bilineari simmetriche $T \in \mathrm{Bil}_+(\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}))$ e $R \in \mathrm{Bil}_+(\mathbb{R}[t]_{\leq 2})$ ottenute per polarizzazione rispettivamente da t e da r.
(b) Determinare la matrice che rappresenta R nelle basi $\mathscr{B} = \{1,\ t,\ t^2\}$ e $\mathscr{C} = \{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$.
(c) Determinare una base di $\ker(T)$ e la segnatura di R.
(d) Determinare una base T-ortogonale di $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ e una base R-ortogonale di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

Esercizio 2. Siano W, U sottospazi vettoriali di V e sia $F \in \mathrm{Bil}_+(V)$.
(a) Dimostrare che $W^\perp \cap U^\perp = (W + U)^\perp$.
(b) Dimostrare che $(W \cap U)^\perp \supset W^\perp + U^\perp$.
(c) Supponiamo F non degenere. Dimostrare che $(W \cap U)^\perp = W^\perp + U^\perp$.

Esercizio 3. Sia $F \in \mathrm{Bil}_+(V)$ e sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale.
(a) Se F è non degenere, è vero che $F|_U$ è non degenere?
(b) Se F è definita positiva, è vero che $F|_U$ è definita positiva?
(c) Dimostrare che $F|_U$ è non degenere se e solo se $V = U \oplus U^\perp$.
(d) Assumiamo $F|_U$ non degenere. Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare

$$\rho :\ V \longrightarrow V$$

(detta *riflessione ortogonale rispetto a* U) tale che $\rho|_U = \mathrm{Id}_U$ e $\rho|_{U^\perp} = -\mathrm{Id}_{U^\perp}$. Dimostrare inoltre che $\rho \circ \rho = \mathrm{Id}_V$ e che ρ è una isometria di (V, q_F).

Esercizio 4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $F_A(X, Y) := X^t A Y$ la corrispondente forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^2$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$.
Costruire, se esiste, un'isometria $f : (\mathbb{R}^2, F_A) \to (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Esercizio 5. Sia $q \in \mathrm{Q}(\mathbb{R}^{2n})$ definita da

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Determinate rango e segnatura di q.

Esercizio 6. Munire $\mathbb{R}^3$ del prodotto scalare standard. Sia $v := (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ e sia

$$U := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

(a) Determinare la proiezione ortogonale di v su U e la proiezione ortogonale di v su $U^\perp$.
(b) Determinare la matrice A che rappresenta la riflessione ortogonale $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto al sottospazio U e calcolare $L_A(v)$.

Esercizio 7. Siano $(V, q), (V', q')$ spazi quadratici e sia $(q \oplus q') : V \oplus V' \to \mathbb{K}$ l'applicazione definita come $(q \oplus q')(v, v') := q(v) + q'(v')$.

(a) Dimostrare che $(V \oplus V', q \oplus q')$ è uno spazio quadratico.
Per quali $(V, q), (V', q')$ la proiezione sul primo addendo $\pi : V \oplus V' \to V$ definita come $\pi(v, v') := v$ è una isometria?
(b) Sia F la forma bilineare simmetrica su V ottenuta per polarizzazione da q e siano $K := \ker(F)$ e $Z := V/K$. Dimostrare che

$$\bar{q}([u]) := q(u) \qquad \text{per ogni } [u] \in Z$$

definisce una forma quadratica $\bar{q} : Z \to \mathbb{K}$.
(c) Sia W un complementare di K in V e sia $p : V = W \oplus K \to K$ la proiezione sul secondo addendo. Dimostrare che $f : V \to Z \oplus K$, definita da $f(v) := ([v], p(v))$, è un'isometria se V è munito della forma quadratica q e $Z \oplus K$ è munito della forma quadratica $\bar{q} \oplus 0_K$ (dove 0_K denota la forma quadratica identicamente nulla su K).
