LT in Fisica - Anno accademico 2016/2017

Geometria

Foglio 12 di esercizi - 20 gennaio 2017

(consegna venerdì 27 gennaio 2017)

Esercizio 1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ considerare la forma hermitiana $H_a : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da

$$H_a(w, z) := w_1\overline{z}_1 + w_2\overline{z}_2 + aiw_2\overline{z}_1 - aiw_1\overline{z}_2.$$

(a) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma H_a è definita positiva.

(b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare una base di $\mathbb{C}^2$ che diagonalizzi H_a.

Esercizio 2. Sia $q : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da $q(M) := \mathrm{tr}(M^2)$.

(a) Calcolare $q(A)$ e $q(S)$ quando A è una matrice antisimmetrica e S è una matrice simmetrica.

(b) Determinare rango e segnatura di q.

(c) Analogamente, calcolare rango e segnatura della forma hermitiana $h : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definita come $h(X, Y) := \mathrm{tr}(X\overline{Y})$.

Esercizio 3. Siano $A, B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e siano $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ le forme quadratiche associate $f(v) := v^T Av$ e $g(v) := v^T Bv$.

(a) Determinare rango e segnatura di f e g.

(b) Determinare se gli spazi vettoriali quadratici $(\mathbb{R}^3, f)$ e $(\mathbb{R}^3, g)$ siano isomorfi.

Esercizio 4. Considerare lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard e sia $L_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo determinato dalla matrice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & 4 \\ -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base ortogonale che diagonalizzi L_M.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{A}$ un piano affine euclideo e siano (x_1, x_2) coordinate di un sistema di riferimento affine $\mathrm{RA}(O; v_1, v_2)$ ortonormale. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, sia $\mathscr{C}_t \subset \mathbb{A}$ la conica di equazione

$$\mathscr{C}_t : \quad tx_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_2 = 0.$$

(a) Determinare il tipo affine della conica $\mathscr{C}_t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare equazioni cartesiane per gli assi di simmetria di $\mathscr{C}_3$.

Esercizio 6. Sia $L_X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice

$$X := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare gli autovalori e gli autospazi di L_X e determinare se L_X sia diagonalizzabile.

Esercizio 7. Per ogni $t \in \mathbb{C}$ sia $A(t)$ la matrice

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $L_{A(t)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associato ad $A(t)$ sia diagonalizzabile.

(b) Determinare per quali $t \in \mathbb{C}$ l'endomorfismo $L_{A(t)} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ associato ad $A(t)$ sia diagonalizzabile.
