Geometria (Fisica)

Canale D-K

Prova scritta - 23 gennaio 2018

Nome e Cognome: ____________________

Numero di matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	7	
Totale	35	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, sia L' la retta di equazioni $x = y = 0$. Inoltre, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia L_k la retta passante per i punti

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_k = \begin{pmatrix} 2 \\ k+2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare i valori di k per cui L_k è parallela a L'.

(ii) Determinare i valori di k per cui L_k interseca L': per tali valori di k, determinare $L' \cap L_k$.

(iii) Calcolare la distanza tra L_0 e L'.

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare il cui nucleo ha equazione $x_2 - 2x_3 = 0$ e tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

(i) Determinare una base (v_1, v_2) di $\ker(f)$.

(ii) Verificare che il vettore

$$v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

completa (v_1, v_2) ad una base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Scrivere la matrice associata a f utilizzando sia in partenza che in arrivo la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale reali dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dimostrarla oppure fornire un controesempio.

(i) Il sottoinsieme $U \subset V$ definito da $U = \{p \in V \mid p(2) \cdot p'(0) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale, dove $p' := dp/dt$ indica la derivata di p.

(ii) Il sottoinsieme $W \subset V$ definito da $W = \{p \in V \mid p'(t) = 2t + 1\}$ è un sottospazio vettoriale.

(iii) L'applicazione $T : V \longrightarrow V$ definita come

$$T(p) := p(1)\, t^2 + p'(0)\, t + p(-1)$$

è lineare, e il suo nucleo è banale.

Risoluzione:

Esercizio 4. Considerare lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ dei polinomi reali in t di grado al più 2 e sia $B : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita come

$$B(p, q) := p(1)q'(1) + p'(1)q(1) + \int_0^1 p'(t)q'(t)dt, \qquad \text{dove } p' := \frac{dp}{dt}.$$

(a) Calcolare la matrice che rappresenta la forma bilineare simmetrica B rispetto alla base canonica $\mathcal{C} = \{1,\ t,\ t^2\}$ di V.

(b) Calcolare gli indici n_+, n_- e n_0 della forma bilineare simmetrica reale B.

Risoluzione:

Esercizio 5. Si considerino la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 6 & 4 & -2 \\ -6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

e l'applicazione lineare ad essa associata

$$L_A \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 .$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico $p_{_A}$ associato ad L_A e determinare gli autovalori di L_A.

(ii) Determinare gli autospazi di L_A, specificandone inoltre la dimensione.

(iii) Se possibile, trovare una matrice $Q \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $D := Q \cdot A \cdot Q^{-1}$ sia una matrice diagonale: in tal caso, determinare D.

Risoluzione: