Geometria (Fisica)

Canale D-K

Prova scritta - 9 luglio 2018

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	7	
Totale	35	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio affine euclideo standard, munito delle coordinate canoniche xyz. Considerare il punto $P_0 = (1, 1, 1)$ e le rette affini r_1, r_2 seguenti

$$r_1 = \{(2 + s, -2s, -1 + 3s) \in \mathbb{R}^3 \mid s \in \mathbb{R}\}$$
$$r_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = x + y + z = 0\}$$

(i) Determinare una equazione cartesiana del piano Π passante per r_1 e P_0.

(ii) Determinare equazioni cartesiane per la retta r'' passante per P_0 e incidente r_1 e r_2.

Risoluzione:

Esercizio 2. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, considerare l'applicazione lineare $L_{A_k} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice reale

$$A_k := \begin{pmatrix} k & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di L_{A_k} per ogni valore di k.

(ii) Per ogni k, determinare una base di ciascun autospazio di L_{A_k}.

(iii) Determinare i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile.

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia $V = \{f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$ lo spazio vettoriale complesso di tutte le funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare. Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi di V siano sottospazi vettoriali complessi di V.

(i) Il sottoinsieme $U_1 \subset V$ definito da $U_1 = \{f \in V \mid f(1)^2 + f(2)^2 = 0\}$.

(ii) Il sottoinsieme $U_2 \subset V$ definito da $U_2 = \{f \in V \mid f(0) = \overline{f(1)}\}$.

(iii) ll sottoinsieme $U_3 \subset V$ definito da $U_3 = \{f \in V \mid \text{esiste almeno uno } z \in \mathbb{C} \text{ per cui } f(z) = 0\}$.

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia $D \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ una matrice diagonale con $D_{i,i} = \lambda_i$ e consideriamo la forma quadratica $\varphi : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita come $\varphi(X) = \mathrm{tr}(X^T \cdot D \cdot X)$.

(i) Determinare la matrice che rappresenta φ rispetto alla base standard $\mathcal{B} = \{E_{1,1},\, E_{1,2},\, E_{2,1},\, E_{2,2}\}$ di $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

(ii) Determinare gli indici n_+, n_-, n_0 di φ in funzione dei valori $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Risoluzione:

Esercizio 5. Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ considerare i sottospazi W_t di $\mathbb{R}^4$ definiti come

$$W_t = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Determinare i valori di t per cui $W_t = \mathbb{R}^4$.

(b) Determinare equazioni cartesiane per tutti i W_t che siano diversi da tutto $\mathbb{R}^4$.

(c) Determinare la dimensione e una base del sottospazio $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} W_t$.

Risoluzione: