# Geometria (LT Fisica)

Anno accademico 2018/19

*Canale D-K*

## Appello straordinario (6 novembre 2018)

*Cognome:* ______________________________

*Nome:* ______________________________

*Numero di matricola:* ______________________

| Esercizio | Punti totali | Punteggio |
|---|---|---|
| 1 | 7.5 | |
| 2 | 7.5 | |
| 3 | 7.5 | |
| 4 | 7.5 | |
| Totale | 30 | |

*Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà* 0 *punti.*

*Verrà corretto* **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

**Voto/30:** 

**Esercizio 1.** (a) Esprimere in forma cartesiana, ovvero nella forma $x + iy$, le due radici quadrate del numero complesso $4 + 2i$.

(b) Esprimere il numero complesso $w = -\sqrt{3} + i$ in forma polare (o trigonometrica), ovvero nella forma $\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ o, equivalentemente, $\rho e^{i\theta}$.

(c) Siano $z_1, \dots, z_7$ le soluzioni dell'equazione $z^7 = -\sqrt{3} + i$.
Quante di esse hanno parte reale strettamente positiva? Esprimerle in forma trigonometrica.

**Risoluzione**:

**Esercizio 2.** Sia $\mathbb{R}[t]$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi in $t$ a coefficienti reali.
Diremo che un polinomio $p \in \mathbb{R}[t]$ ha almeno una radice intera se esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $p(n) = 0$.
Quali dei seguenti sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[t]$?
(Giustificare la propria risposta con una dimostrazione oppure un controesempio.)

(a) $W = \{ p \in \mathbb{R}[t] : \ p \text{ ha almeno una radice intera} \}$.

(b) $Z = \{ p \in \mathbb{R}[t] : \ |p(1)| \geq |p(0)| \}$.

(c) $U = \{ p \in \mathbb{R}[t] : \ p(2)^2 + p(3)^4 = 0 \}$.

**Risoluzione**:

**Esercizio 3.** Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale complesso dei polinomi nella variabile $t$ di grado minore o uguale a 2. Sia $\mathcal{B} = (q_0, q_1, q_2)$ una base di $V$ con $q_i = t^i$ e sia $\alpha \in \mathbb{C}$. Sia $f_\alpha : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $f_\alpha(p) := \alpha \cdot p(0)t^2 + p'$, dove $p' = \frac{dp}{dt}$.

(a) Determinare la matrice che rappresenta $f_\alpha$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e in arrivo.

(b) Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $f_\alpha$.

(c) Calcolare il polinomio minimo di $f_\alpha$ e dire se $f_\alpha$ sia diagonalizzabile.

**Risoluzione**:

**Esercizio 4.** Nello spazio euclideo tridimensionale standard $\mathbb{R}^3$ (con coordinate standard $x_1, x_2, x_3$), considerare la retta $\ell$ per l'origine con vettore direttore $v = e_1 + e_2$ e sia $\Pi$ il piano affine ortogonale a $\ell$ e passante per il punto $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul piano affine $\Pi$.

(a) Scrivere una equazione cartesiana per il piano $\Pi$.

(b) Determinare una matrice $A$ e un vettore $b$ tali che $f(x) = Ax + b$.

(c) Data $r \subset \mathbb{R}^3$ la retta affine $r = \{x_1 = 0,\ x_3 = 1\}$, determinare il punto $P \in \ell$ e $Q \in r$ a distanza minima l'uno dall'altro, e calcolare tale distanza.

**Risoluzione**: