

Geometria (LT Fisica) - Canale D-K

ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI (28 SETTEMBRE 2017)

Esercizio 1. Scrivere i seguenti numeri

$$(1 + \sqrt{2})(1 - 2\sqrt{2}), \quad \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}, \quad (1 - \sqrt{2})^3, \quad \frac{(2 - 2\sqrt{2})^{11}}{(2 - \sqrt{2})^{10}}$$

nella forma $a + b\sqrt{2}$.

Esercizio 2. Scrivere i seguenti numeri complessi

$$(\cos(\pi/9) + i \sin(\pi/9))^3, \quad \frac{2 + i}{i + 2}, \quad i^{2017}, \quad \frac{13 - 2i}{6 + 4i}, \quad \frac{(1 + i)^{2017}}{16^{252}}$$

nella forma cartesiana $a + ib$.

Esercizio 3. Si considerino i tre numeri complessi $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = -2i$.

- (1) Calcolare i tre quozienti $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$, $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ e $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$.
- (2) Dire, motivando la risposta, se il triangolo nel *piano di Gauss*¹ di vertici z_1, z_2, z_3 sia acutangolo, rettangolo, oppure ottusangolo.
- (3) Trovare, oppure dimostrare che non esistono, tre numeri complessi distinti u_1, u_2, u_3 tali che i tre quozienti $\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}$, $\frac{u_3 - u_2}{u_1 - u_2}$ e $\frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_3}$ abbiano tutti parte reale negativa.

Esercizio 4. Calcolare le radici quadrate² dei numeri complessi

$$1 + 2i, \quad 4 - 3i, \quad 1 - 4i.$$

ed esprimerle nella forma cartesiana $a + ib$.

Esercizio 5. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio a coefficienti complessi

$$p(X) = X^7 - 4X^5 + 3X^2 + 2X + 1 - 2i.$$

Quanto vale $p(\bar{\alpha})$?

Esercizio 6. Sia $\xi \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $X^2 + X + 5$. Trovare, oppure dimostrare che non esistono, due numeri razionali $a, b \in \mathbb{Q}$ tali che $(a + b\xi)(1 - \xi) = 1$.

¹Quando si rappresenta un numero complesso come un punto, oppure un vettore, nel piano cartesiano, quel piano viene anche detto *piano complesso* oppure *piano di Gauss*.

²Sia $n \geq 1$ un intero. Se due numeri complessi z, w soddisfano l'equazione $z^n = w$, allora si dice che z è una radice n -esima di w .