Geometria (LT Fisica) - Canale D-K

Esercizi (10 ottobre 2017)

Esercizio 1. Determinare quale di queste applicazioni sia lineare:

(a) l'applicazione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x - y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$;

(b) l'applicazione $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come $S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 2y \end{pmatrix}$;

(c) l'applicazione $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$;

(d) l'applicazione $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y \\ \dfrac{2x^3 + x^2 y + y + 2x}{x^2+1} \end{pmatrix}$;

(e) l'applicazione $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + |y| \\ y - x \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Per ogni valore del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, considerare l'applicazione $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita come

$$T_\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + \lambda x_2^2 + x_3 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -4x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ tale T_λ sia lineare.
(b) Per tali valori di λ, determinare una parametrizzazione *minimale* dell'immagine di T_λ (ossia usando il numero minimo di parametri).

Esercizio 3. Trovare una parametrizzazione "minimale" dell'immagine di L_M, dove

(a) $L_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ con $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $L_M : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & 2t \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2t & t & t & 0 \end{pmatrix}$ al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$;

(c) $L_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Inoltre determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ il vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartenga all'immagine di L_M.

Esercizio 4. Iniziamo con il dare due definizioni.

Definizione. Dati P_0, P_1 punti di $\mathbb{R}^k$, il segmento $[P_0,\, P_1] \subset \mathbb{R}^k$ è definito come

$$[P_0,\, P_1] := \{P_t = (1-t)P_0 + tP_1 \in \mathbb{R}^k \mid t \in [0,1]\}.$$

Un sottoinsieme $K \subseteq \mathbb{R}^k$ si dice **convesso** se, per ogni $P, Q \in K$, il segmento $[P,\, Q]$ è interamente contenuto in K.

Definizione. Siano X, Y insiemi e sia $T : X \to Y$ una applicazione. Dato un sottoinsieme $S \subseteq Y$, la sua **immagine inversa** $T^{-1}(S)$ è un sottoinsieme di X definito come

$$T^{-1}(S) := \{x \in X \mid T(x) \in S\}.$$

(Nonostante la notazione simile, il fatto che T sia o non sia biiettiva non c'entra nulla!)

(0) Dimostrare che $\mathbb{R}^n$ è convesso.
(i) Dimostrare che, se $C, C' \subseteq \mathbb{R}^n$ sono convessi, allora la loro intersezione $C \cap C'$ è convessa (se non è vuota).
(ii) Dimostrare che $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ non è convesso, dove O è il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$.
(iii) Mostrare con un controesempio che, se $C, C' \subseteq \mathbb{R}^n$ sono convessi, allora la loro unione $C \cup C'$ può non essere convessa.
(iv) Dimostrare che, se $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una applicazione lineare, allora $f(C) \subseteq \mathbb{R}^m$ è convesso.
(v) Dimostrare che, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è lineare e $c \in \mathbb{R}$, allora $C := \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) \le c\}$ è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$.
(vi) Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare e $S \subseteq \mathbb{R}^m$ convesso, $f^{-1}(S)$ è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$.