Geometria (LT Fisica)

Anno accademico 2017/18 - Canale D-K

Esercizi del 18 dicembre 2017

Esercizio 1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, determinare equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio $V_t = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subset \mathbb{R}^4$ generato da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Siano U, W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ definiti come $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3)$ e $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 0\}$, dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Trovare una base di $U + W$ e una base di $U \cap W$.

Esercizio 3. Trovare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $AX = b$ ha soluzione, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dire se, per tali valori di k, la soluzione è unica.

Esercizio 4. Siano $S, T : V \to W$ applicazioni lineari.

(a) Dimostrare che $\mathrm{rg}(S)$ e $\mathrm{rg}(T)$ sono entrambi $\leq \min\{\dim(V),\ \dim(W)\}$.

(b) Dimostrare che $\mathrm{rg}(S + T) \leq \min\{\dim(V),\ \mathrm{rg}(S) + \mathrm{rg}(T)\}$.

Esercizio 5. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare e siano $v_1, \dots, v_k \in V$ e $w_j = f(v_j) \in W$ per $j = 1, \dots, k$.

(a) Dimostrare che, se $\{v_1, \dots, v_k\}$ genera V, allora $\{w_1, \dots, w_k\}$ genera W.

(b) Dimostrare che, se $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente indipendenti in W, allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti in V.

(c) Dimostrare che, se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti in V e f è iniettiva, allora $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente indipendenti in W.

Esercizio 6. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare e siano $V_1 \subseteq V$ e $W_1 \subseteq W$ sottospazi vettoriali. Dimostrare che

$$H_1 := \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid f(V_1) \subseteq W_1\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Esercizio 7. In ciascuno dei tre casi seguenti, dire se sia possibile costruire un'applicazione lineare f che soddisfi le condizioni indicate e, nel caso, dire se tale f sia unica.

(a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva tale che $\ker(f)$ sia generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker(f)$ sia generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva tale che $\mathrm{Im}(f)$ sia generata da $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 8. Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare e sia $I_V : V \to V$ l'applicazione identità di V.

(a) Supponiamo che f sia una *proiezione*, ossia soddisfi $f \circ f = f$. Dimostrare che $f(v) = v$ per ogni $v \in \mathrm{Im}(f)$ e che

$$V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f), \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(f) = \ker(I_V - f).$$

(b) Supponiamo che f sia una *riflessione*, ossia soddisfi $f \circ f = -I_V$. Dimostrare che f è invertibile e che

$$V = A \oplus R$$

dove $A = \ker(f - I_V)$ e $R = \ker(f + I_V)$. Dimostrare inoltre che $f|_A = I_A$ e $f|_R = -I_R$.