Geometria (LT Fisica)

Anno accademico 2017/18 - Canale D-K

Esercizi del 3 gennaio 2018

Esercizio 1. Calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e dedurre che per ogni $a \in \mathbb{K}$ non nullo, le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono simili.

Esercizio 2. Date le due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolare:

(a) le matrici $A^2 - 15I$ e $-B^3 + 7B^2 - 14B + 8I$;

(b) i polinomi caratteristici $p_A(t)$ e $p_B(t)$ di A e B rispettivamente.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita con base $\mathcal{B}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Dimostrare che f è diagonalizzabile se e solo se la matrice $\theta^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$ (in partenza e in arrivo) è simile ad una matrice diagonale.

Esercizio 4. Dimostrare che la matrice a coefficienti reali

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile, ossia che non è simile ad alcuna matrice diagonale.

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi di t di grado al più 3. Definiamo una applicazione lineare $F : V \to V$ nel modo seguente:

$$F(p) := \frac{d^2p}{dt^2} + 5\frac{dp}{dt}.$$

Calcolare il polinomio caratteristico di F, determinare gli autovalori e gli autospazi di F e dire se F sia diagonalizzabile.

Esercizio 6. Considerare la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ seguente

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix}.$$

Trovare basi di $\ker(L_A)$ e $\mathrm{Im}(L_A)$. Determinare gli autovalori e gli autospazi di L_A e dire se sia diagonalizzabile.

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ l'applicazione lineare definita come $f(x, y, z, t) = (2x, y+x, z+x, t+x)$, e sia $V \subset \mathbb{K}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $x + y - z - t = 0$.
Dimostrare che $f(V) \subseteq V$ e calcolare il polinomio caratteristico di $f\big|_V^V : V \to V$, gli autovalori e gli autospazi. Se $f\big|_V^V$ è diagonalizzabile, determinare una base di V composta da autovettori per $f\big|_V^V$.

Esercizio 8. Siano $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ due matrici diagonalizzabili.
Dimostrare che A, B sono simili se e solo A, B hanno il medesimo polinomio caratteristico.

Esercizio 9. Sia $T : \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare $T(A) := A^T$.
Calcolare il polinomio caratteristico di T, determinarne autovalori ed autospazi.
Dire se T sia diagonalizzabile.

Dentro uno spazio vettoriale V, un sottospazio affine E è un traslato di un sottospazio vettoriale $\vec{E}$. Le proprietà dei sottospazi affini sono simili a quelle dei sottospazi vettoriali. Mentre però negli spazi vettoriali pensiamo ai vettori come a spostamenti e quindi ha senso sommarli (ossia comporre gli spostamenti), nei sottospazi affini pensiamo ai loro elementi come a punti o a posizioni: in questo senso, non ha senso sommare due punti.

Definizione 0.1. Un *sottospazio affine* E di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme della forma

$$E = v_0 + \vec{E} := \{v_0 + v \in V \mid v \in \vec{E}\}$$

dove $v_0 \in V$ e $\vec{E}$ è un sottospazio vettoriale di V detto *giacitura di* E. Gli elementi di E si dicono *punti* dello spazio affine.
La *dimensione dello spazio affine* E è per definizione la dimensione di $\vec{E}$ come spazio vettoriale. Un *iperpiano affine* in V è un sottospazio affine che abbia come giacitura un iperpiano.

In particolare, un sottospazio affine è non vuoto.

Esempio 0.2. Un sottoinsieme $E = \{v\}$ che consiste di un solo punto di V è un sottospazio affine di dimensione 0 con giacitura $\vec{E} = \{0_V\}$. Il sottoinsieme $E = V$ è un sottospazio affine di V con giacitura $\vec{E} = V$. Dunque V può anche essere visto come sottospazio affine di se stesso.

Esercizio 10. Sia E un sottospazio affine di V.

(a) Dimostrare che $\vec{E} = \{q - p \in V \mid p, q \in E\}$ e quindi la giacitura $\vec{E}$ di E è unica ed unicamente determinata da E. Il vettore $q - p \in \vec{E}$ si indica anche con $\overrightarrow{pq}$.
(Questo mostra che la giacitura $\vec{E}$ è il sottospazio vettoriale degli spostamenti che, applicati ad un punto in E, vanno a finire in un punto che stia ancora in E.)

(b) Dimostrare che $E = p + \vec{E}$ per ogni $p \in E$.

(c) Dimostrare che, per ogni $p \in E$, l'applicazione $\Phi_p : \vec{E} \to E$ definita come $\Phi_p(v) := p + v$ è una biiezione.

(d) Siano E_1, E_2 sono sottospazi affini di V con intersezione $E_1 \cap E_2$ è non vuota. Dimostrare che $E_1 \cap E_2$ è un sottospazio affine di V e determinarne la giacitura.
Stessa domanda per una collezione qualunque (E_i) di sottospazi affini di V.

(e) Sia $g : V \to W$ una applicazione lineare e sia $F \subseteq W$ un sottospazio affine. Dimostrare che $g^{-1}(F)$ è un sottospazio affine di V e determinarne la giacitura.
Dimostrare che, se $F = \{w\}$ consiste di un solo punto, allora $g^{-1}(w)$ ha dimensione uguale alla dimensione del nucleo di g.
Dimostrare che $\dim\ g^{-1}(F) = \dim\ \ker(g) + \dim\ F \cap \mathrm{Im}(g)$.

(f) Sia $V = \mathbb{K}^n$. Siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli e sia $b \in \mathbb{K}$. Dimostrare che $E = \{X \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}$ è un iperpiano affine in $\mathbb{K}^n$.

(g) Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e sia $B \in \mathbb{K}^m$. Dimostrare che $E = \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = B\}$ è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$, oppure è vuoto.

Alla luce del punto (d) precedente, possiamo dare la seguente definizione di span affine.

Definizione 0.3. Dato un sottoinsieme S non vuoto dello spazio vettoriale V, lo *span affine* $\mathrm{Span}_{aff}(S)$ di S è l'intersezione di tutti i sottospazi affini di V che contengono S, e dunque è il più piccolo sottospazio affine di V che contenga S.

Definizione 0.4. Due sottospazi affini E, F dello spazio vettoriale V si dicono *paralleli* se $\vec{E} \subseteq \vec{F}$ oppure $\vec{F} \subseteq \vec{E}$.

Esercizio 11. Dimostrare che

(i) La giacitura di $\mathrm{Span}_{aff}(S)$ è generata dall'insieme $\{s_1 - s_0 \in V \mid s_0, s_1 \in S\}$.

(ii) Dimostrare che, se S consiste di due punti distinti, allora $\mathrm{Span}_{aff}(S)$ è una retta affine (ossia un sottospazio affine di dimensione 1). Dimostrare che, se S consiste di tre punti non allineati, allora $\mathrm{Span}_{aff}(S)$ è un piano affine (ossia un sottospazio affine di dimensione 2).

(iii) Dimostrare che, se S consiste di $n+1$ punti, allora $\mathrm{Span}_{aff}(S)$ è un sottospazio affine di dimensione al più n.
Quando la dimensione è esattamente n, i punti di S verranno detti *affinemente indipendenti* (analogo di "linearmente indipendenti") e saranno un *riferimento affine* (analogo di "base") di $\mathrm{Span}_{aff}(S)$.

(iv) Dimostrare che due rette affini in $\mathbb{K}^2$ sono coincidenti, oppure parallele, oppure incidenti in un punto.

(v) Siano E, F sottospazi affini di V. Dimostrare che

$$\dim(E) + \dim(F) = \begin{cases} \dim(\mathrm{Span}_{aff}(E \cup F)) + \dim(E \cap F) & \text{se } E \cap F \neq \emptyset \\ \dim(\mathrm{Span}_{aff}(E \cup F)) - 1 & \text{se } E \cap F = \emptyset \end{cases}$$

anche detta *versione affine della formula di Grassmann*.

Definizione 0.5. Siano V_1, V_2 spazi vettoriali e $E_i \subseteq V_i$ sottospazi affini. Una applicazione $f : E_1 \to E_2$ si dice *applicazione affine* se esiste una applicazione lineare $\vec{f} : \vec{E}_1 \to \vec{E}_2$ tale che $f(q) - f(p) = \vec{f}(\overrightarrow{pq})$ per ogni $p, q \in E_1$.

Esercizio 12. Siano V_i spazi vettoriali e $E_i \subseteq V_i$ sottospazi affini.

(a) Dimostrare che, se $f : E_1 \to E_2$ è una applicazione affine, allora $\vec{f}$ è univocamente determinata da f.

(b) Dimostrare che, data un'applicazione $h : \vec{E}_1 \to \vec{E}_2$ lineare e punti $p_i \in E_i$, esiste un'unica applicazione affine $f : E_1 \to E_2$ tale che $f(p_1) = p_2$ e $\vec{f} = h$.

(c) Dimostrare che, se $f : E_1 \to E_2$ e $g : E_2 \to E_3$ sono applicazioni affini, allora $g \circ f : E_1 \to E_3$ è una applicazione affine e $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

(c) Siano $E_1 = V_1 = \mathbb{K}^n$ e $E_2 = V_2 = \mathbb{K}^m$. Dimostrare che, per ogni applicazione affine $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, esistono unici $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $q \in \mathbb{K}^m$ tali che $f(p) = Ap + q$ (*forma standard*). Dimostrare inoltre che $\vec{f} = L_A$.
Quando $A = I$, la f prende il nome di *traslazione*. Questo ci mostra che le applicazioni affini tra spazi numerici sono composizione di una applicazione lineare e di una traslazione.

(d) Dimostrare che un'applicazione affine $f : E_1 \to E_2$ è invertibile se e solo se è biiettiva.
Siano $E_i = V_i = \mathbb{K}^n$ e sia $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una applicazione affine invertibile nella forma $f(p) = Ap + q$. Determinare la forma standard della sua inversa f^{-1}.

(e) Siano $E_i = V_i = \mathbb{K}^n$ e sia $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una applicazione affine. Dimostrare che, se 1 non è un autovalore dell'endomorfismo lineare $\vec{f}$, allora f ha esattamente un punto fisso.