Geometria (LT Fisica)

Anno accademico 2017/18 - Canale D-K

Esercizi del 20 gennaio 2018

(Su $\mathbb{K}^n$ la forma bilineare simmetrica standard è anche detta "prodotto scalare standard". Ricordiamo che, se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e b è una forma bilineare simmetrica su V, allora il rango di b è definito come $rg(b) := n - n_0(b)$ e la segnatura di b è definita come $s(b) := n_+(b) - n_-(b)$.)

Esercizio 1. Siano V, W gli spazi vettoriali reali $V = \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ e $W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.
Si consideri la forma quadratica $t : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$t(A) := \mathrm{Tr}(A)^2$$

e la forma quadratica $r : W \times W \to \mathbb{R}$ definita da

$$r(p) := p(2)^2 - p(0)^2.$$

(a) Determinare le forme bilineari simmetriche $T : V \times V \to \mathbb{R}$ e $R : W \times W \to \mathbb{R}$ ottenute per polarizzazione rispettivamente da t e da r.

(b) Determinare la matrice che rappresenta R nelle base $\mathscr{B} = \{1,\ t,\ t^2\}$ e la matrice che rappresenta R nella base $\mathscr{C} = \{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$.

(c) Determinare una base di $\ker(T)$ e gli indici di positività, negatività e nullità di R.

(d) Determinare una base T-ortogonale di $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ e una base R-ortogonale di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano W, U sottospazi vettoriali di V. Sia inoltre $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica.

(a) Dimostrare che $W^\perp \cap U^\perp = (W + U)^\perp$.

(b) Dimostrare che $(W \cap U)^\perp \supseteq W^\perp + U^\perp$.

(c) Supponiamo b non degenere. Dimostrare che $(W \cap U)^\perp = W^\perp + U^\perp$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Sia inoltre $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica.

(a) Se b è non degenere, è vero che $b|_U$ è non degenere?

(b) Supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Se b è definita positiva, è vero che $b|_U$ è definita positiva?

(c) Assumiamo $b|_U$ non degenere. Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare

$$\rho :\ V \longrightarrow V$$

(detta *riflessione ortogonale rispetto a U*) tale che $\rho|_U = \mathrm{id}_U$ e $\rho|_{U^\perp} = -\mathrm{id}_{U^\perp}$.
Dimostrare inoltre che $\rho \circ \rho = \mathrm{id}_V$ e che ρ è una isometria lineare (V, b) in sé.

Esercizio 4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $b(X, Y) := X^t AY$ la corrispondente forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^2$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è la forma bilineare simmetrica standard su $\mathbb{R}^2$.
Dire se esista un'isometria lineare $f : (\mathbb{R}^2, b) \to (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e, se sì, esibire la matrice associata ad essa.

Esercizio 5. Sia $q : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da

$$q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Determinate rango e segnatura di q.

Esercizio 6. Munire $\mathbb{R}^3$ del prodotto scalare standard. Sia $v := (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ e sia

$$U := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

(a) Determinare la proiezione ortogonale di v su U e la proiezione ortogonale di v su $U^\perp$.

(b) Determinare la matrice A che rappresenta la riflessione ortogonale $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto al sottospazio U e calcolare $L_A(v)$.

Esercizio 7. Sia $q : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da $q(M) := \mathrm{Tr}(M^2)$.

(a) Calcolare $q(A)$ e $q(S)$ quando A è una matrice antisimmetrica e S è una matrice simmetrica.

(b) Determinare rango e segnatura di q.

Esercizio 8. Sia $S \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice reale simmetrica $n \times n$ e sia $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita da $b(v, w) := v^T Sw$.
Per ogni $1 \le p \le n$, sia $S(p)$ la matrice $p \times p$ definita come $S(p)_{ij} := S_{ij}$ per ogni $1 \le i, j \le p$: per esempio

$$S(1) = \begin{pmatrix} S_{11} \end{pmatrix},\ S(2) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix},\ S(3) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix},$$

(i) Dimostrare che $S(p)$ rappresenta la restrizione di b al sottospazio $V(p) = \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_p)$ rispetto alla base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.

(ii) Supponiamo che $\det(S(p)) \neq 0$ per ogni $p = 1, \ldots, n$.
Dimostrare che $n_-(b)$ è uguale al numero di cambi di segno nella sequenza

$$1,\ \det(S(1)),\ \det(S(2)),\ \det(S(3)),\ \ldots\ \det(S(n)) = \det(S)$$

e che $n_+(b) = n - 2n_-(b)$ e $n_0(b) = 0$.

(iii) Supponiamo che $\det(S(p)) \neq 0$ per ogni $p = 1, \ldots, k$ (per qualche $k \le n$).
Dimostrare che $n_-(b)$ è almeno uguale al numero di cambi di segno nella sequenza

$$1,\ \det(S(1)),\ \det(S(2)),\ \det(S(3)),\ \ldots\ \det(S(k))$$

e che $n_+(b)$ è almeno uguale alle permanenze di segno nella stessa sequenza.

Esercizio 9. Siano $B, C \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ le matrici

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e siano $b, c : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ le forme bilineare simmetriche associate $b(v, w) := v^T Bw$ e $c(v, w) := v^T Cw$.

(a) Determinare rango e segnatura di b e c.

(b) Determinare se esista una isometria lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tra gli spazi vettoriali $(\mathbb{R}^3, b)$ e $(\mathbb{R}^3, c)$ muniti di forma bilineare simmetrica.

Esercizio 10. Considerare lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard e sia $L_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo determinato dalla matrice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & 4 \\ -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ (rispetto al prodotto scalare standard) che diagonalizzi L_M.

Esercizio 11. Sia $N \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ la matrice

$$N := \begin{pmatrix} 22 & -12 \\ 35 & -19 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare le entrate della matrice N^m per ogni $m \in \mathbb{Z}$.

(b) Calcolare $e^N := \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} N^m$.

Esercizio 12. Sia $L_X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice

$$X := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare gli autovalori e gli autospazi di L_X e determinare se L_X sia diagonalizzabile.

Esercizio 13. Per ogni $t \in \mathbb{C}$ sia $A(t)$ la matrice

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $L_{A(t)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associato ad $A(t)$ sia diagonalizzabile.

(b) Determinare per quali $t \in \mathbb{C}$ l'endomorfismo $L_{A(t)} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ associato ad $A(t)$ sia diagonalizzabile.