Anno accademico 2016/2017

Istituzioni di geometria superiore

Foglio 1 di esercizi - 7 ottobre 2016
(consegna venerdì 14 ottobre 2016)

Esercizio 1. Sia M una varietà differenziabile (Hausdorff, a base numerabile).

(a) Dimostrare che M è localmente compatta e localmente connessa per archi.
(b) Dimostrare che M ha al più una quantità numerabile di componenti connesse.
(c) Dimostrare che, se M è connessa, allora M è connessa per archi.

Esercizio 2. Siano M e N varietà differenziabili di dimensioni rispettive m e n.

(i) Dimostrare che è possibile munire lo spazio topologico $M \times N$ di una struttura differenziabile (di dimensione $m+n$) in modo tale che le due proiezioni $\pi_1 : M \times N \to M$ e $\pi_2 : M \times N \to N$ siano differenziabili.
(ii) Dimostrare che tale struttura differenziabile è unica se si richiede la seguente proprietà universale (questa struttura sarà la struttura differenziabile standard sul prodotto).

Comunque date una varietà Q e applicazioni differenziabili $f : Q \to M$ e $g : Q \to N$, l'applicazione $(f, g) : Q \to M \times N$ è differenziabile.

(iii) Dimostrare che, se $p \in M$ e $q \in N$, esiste un'identificazione canonica tra $T_{(p,q)}(M \times N)$ e $(T_pM) \times (T_qN)$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ il gruppo quoziente, munito della topologia indotta da $\mathbb{R}^n$ tramite la proiezione canonica $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (*toro n-dimensionale*).

(a) Dimostrare che $\mathbb{T}^n$ è uno spazio topologico di Hausdorff, a base numerabile.
(b) Dimostrare che $\mathbb{T}^1$ può essere dotato di una struttura di varietà C^∞ di dimensione 1 tale che la proiezione canonica $\mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ sia liscia.
(c) Dimostrare che $\mathbb{T}^n$ può essere dotato di una struttura di varietà di dimensione n tale che la proiezione canonica $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ sia liscia.
(d) Dimostrare che $\mathbb{T}^n$ è connesso per archi e compatto.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}^3$ con coordinate standard (x_1, x_2, x_3) e identifichiamo il piano $\Pi = \{x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}^2$. Consideriamo la sfera unitaria standard $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e sia $p = (0, 0, 1) \in S^2$. Per ogni $p \neq q \in S^2$, sia L_q la retta passante per $-p$ e q.

Chiamiamo $\pi_+ : U_+ = S^2 \setminus \{-p\} \to \Pi \cong \mathbb{R}^2$ la proiezione stereografica di centro p, ottenuta mandando un punto $q \in S^2$ con $q \neq p$ nell'unico punto di intersezione $L_q \cap \Pi$.
Similmente, sia $\pi_- : U_- = S^2 \setminus \{p\} \to \Pi \cong \mathbb{R}^2$ la proiezione stereografica di centro $-p$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{A} = \{(U_+, \pi_+),\ (U_-, \pi_-)\}$ è un atlante C^∞ per S^2 di dimensione 2, che induce la struttura differenziabile standard su S^2.
(b) Dimostrare che S^1 è diffeomorfa a $\mathbb{RP}^1$ e che S^2 è diffeomorfa a $\mathbb{CP}^1$.
(c) Mostrare che le proiezioni canoniche al quoziente

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n \qquad\qquad \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$$

sono differenziabili e che il loro differenziale (in un qualunque punto) è suriettivo.
