Anno accademico 2016/2017

Istituzioni di geometria superiore

Foglio 2 di esercizi - 14 ottobre 2016
(consegna venerdì 21 ottobre 2016)

Esercizio 1. Siano M, N varietà differenziabili di dimensione n. Siano $U \subset M$ e $V \subset N$ aperti e sia $f : U \to V$ un diffeomorfismo. Definiamo $Q := (M \coprod N)/\sim$, dove $\sim$ identifica $x \in U$ con $f(x) \in V$, ottenuto *incollando M con N lungo gli aperti U, V tramite la mappa f.*

(a) Dimostrare che Q ha una base numerabile.
(b) Dimostrare che Q è di Hausdorff se: per ogni $(x_k) \subset U$ con $x_k \to x \in \partial U$, la successione $(f(x_k))$ diverge in $\overline{V}$; e viceversa, per ogni $(y_k) \subset V$ con $y_k \to y \in \partial V$ la successione $(f^{-1}(y_k))$ diverge in $\overline{U}$.
(c) Dimostrare che, se vale l'ipotesi in (b), allora Q ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione n tale che le inclusioni $M \to Q$ e $N \to Q$ siano diffeomorfismi sulle loro immagini.

Esercizio 2. Siano M, N varietà differenziabili di dimensione n e siano $D \subset M$ e $E \subset N$ aperti diffeomorfi alla palla aperta $B(0,2) \subset \mathbb{R}^n$ tramite $\phi : D \to B(0,2)$ e $\psi : E \to B(0,2)$. Denotiamo $\overline{D'} = \phi^{-1}(\overline{B(0,1)})$ e $\overline{E'} = \psi^{-1}(\overline{B(0,1)})$.
La *somma connessa $M\#N$ di M e N* è lo spazio ottenuto incollando $M \setminus \overline{D'}$ e $N \setminus \overline{E'}$ lungo gli aperti $D \setminus \overline{D'}$ e $E \setminus \overline{E'}$ tramite la mappa $g := (\psi^{-1} \circ h \circ \phi) : D \setminus \overline{D'} \to E \setminus \overline{E'}$, dove $h(x) = \frac{3 - \|x\|}{\|x\|} x$.

(a) Dimostrare che $M\#N$ è una varietà differenziabile.
(b) Dimostrare che, se M e N sono connesse, allora $M\#N$ è connessa.

Esercizio 3. Consideriamo le seguenti applicazioni tra sfere.

(i) Sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ e sia $d \geq 1$ intero. Consideriamo la mappa $M_d : S^1 \to S^1$ definita come $M_d(z) = z^d$. Dimostrare che M_d è C^∞ e ha differenziale suriettivo in ogni punto.
(ii) Vedendo S^3 come $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, consideriamo l'applicazione $f : S^3 \to S^2$ come $f(z, w) = (2\mathrm{Re}(\overline{z}w), 2\mathrm{Im}(\overline{z}w), |z|^2 - |w|^2)$. Dimostrare che f è C^∞ e con differenziale suriettivo.
(iii) Per ogni $n \geq 0$, consideriamo la mappa antipodale $A_n : S^n \to S^n$ che manda x in $-x$.
Dimostrare che A_n è un diffeomorfismo C^∞.

Esercizio 4. Sia $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ definita come $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$.

(i) Dimostrare che df è iniettivo in ogni punto di S^2.
(ii) Dimostrare che $f(p) = f(-p)$ per ogni $p \in S^2$ e quindi che f induce un'applicazione differenziabile $\overline{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$.
(iii) Dimostrare che $\overline{f}$ è iniettiva e concludere che $\overline{f}$ è una embedding.
