Anno accademico 2016/2017

Istituzioni di geometria superiore

Foglio 3 di esercizi - 21 ottobre 2016
(consegna venerdì 28 ottobre 2016)

Esercizio 1. Sia M una varietà differenziabile e $X \in \mathcal{X}(M)$ un campo vettoriale. Sia inoltre $\gamma : I \to M$ una curva integrale massimale per X, dove $0 \in I \subset \mathbb{R}$.

(i) Mostrare che vale una ed una sola delle seguenti:
  (a) γ è costante;
  (b) γ è iniettiva;
  (c) γ è non costante e periodica, ossia esiste $T > 0$ tale che $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ per ogni $t \in I = \mathbb{R}$.
  Dimostrare inoltre che, nei casi (b) e (c), $\dot{\gamma}_t \neq 0$ per ogni $t \in I$.

(ii) Nel caso (c), dimostrare che esiste un $T > 0$ minimo, detto *periodo*, tale che $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ per ogni t.

(iii) Sia $S \subset M$ una sottovarietà chiusa e supponiamo che $\gamma(0) \in S$ e che X è tangente a S (ossia $X_p \in T_pS$ per ogni $p \in S$). Dimostrare che allora $\gamma(t) \in S$ per ogni $t \in I$.
Mostrare che la conclusione può non valere, se la sottovarietà S non è chiusa.

(iv) Dimostrare che in $\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $V = y\dfrac{\partial}{\partial x} + [-x + (1 - x^2 - y^2)y]\dfrac{\partial}{\partial y}$ ha esattamente una curva integrale periodica.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici $n \times n$ reali, dotate della naturale struttura di varietà C^∞ indotta dalla biiezione $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^n)^n \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Chiaramente $T_I\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ può essere identificato con $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(1) Sia $\mathcal{X} := \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
Dimostrare che $\mathcal{X}$ è una sottovarietà C^∞ di $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, calcolarne la dimensione e determinare lo spazio tangente $T_I\mathcal{X}$ a $\mathcal{X}$ nella matrice identità I come sottospazio di $T_I\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(2) Sia $\mathcal{Y}$ uno dei seguenti sottoinsiemi di $\{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, M \text{ simmetrica}\} \\
\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, M \text{ simmetrica definita positiva}\} \\
\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, M \text{ anti-simmetrica}\} \\
\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, M \text{ triangolare superiore con } M_{ii} > 0 \text{ per ogni } i\} \\
\mathcal{R}(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, M \text{ diagonalizzabile con autovalori distinti}\} \\
\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, M \text{ diagonalizzabile}\}
\end{aligned}$$

Dire se $\mathcal{Y}$ sia una sottovarietà C^∞ di $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se sì, determinare $T_I\mathcal{Y} \subset \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

(2b) Dire quali dei luoghi $\mathcal{Y}$ descritti in (2) siano chiusi e quali siano aperti in $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(3) Dimostrare che $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ e che $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$.

(4) Dimostrare che $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ e $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sono connessi e che $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ hanno due componenti connesse.

(5) Sia $m \leq n$ e sia $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni $\mathbb{R}$-lineari $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, dotato della sua struttura di varietà naturale data dall'identificazione $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{nm}$.
Dimostrare che il sottoinsieme $\mathrm{Inj}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) := \{f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \,|\, f \text{ iniettiva}\}$ è una sottovarietà aperta di $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e che

$$\mathrm{Inj}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \begin{cases} \text{è connesso} & \text{se } m < n \\ \text{ha due componenti connesse} & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Esercizio 3. Siano M, N varietà differenziabili. Una *isotopia* C^∞ è un'applicazione C^∞ $F : N \times [0,1] \to M$ tale che $f_t : N \to M$ definita come $f_t(p) := F(p,t)$ sia una embedding per ogni $t \in [0,1]$. Data tale F, diciamo che $f_0, f_1 : N \to M$ sono isotope.
Sia $\mathrm{Emb}(\Delta^n, M)$ l'insieme delle embedding $\Delta^n \to M$, dove $\Delta^n = B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$ è il disco aperto standard n-dimensionale. Diciamo che $f, g \in \mathrm{Emb}(\Delta^n, M)$ sono equivalenti $f \sim g$ se sono isotope.

(a) Sia M una varietà C^∞ connessa. Dimostrare che, per ogni $p, q \in M$, esiste un diffeomorfismo $f : M \to M$ isotopo all'identità $\mathrm{id}_M : M \to M$ tale che $f(p) = q$.

(b) Data $f : B_{\mathbb{R}^n}(0,1) = \Delta^n \to M$ embedding, dimostrare che la composizione $f \circ \mu_r : B_{\mathbb{R}^n}(0,1) = \Delta^n \to M$ è una embedding per ogni $0 < r < 1$, dove $\mu_r : \Delta^n = B_{\mathbb{R}^n}(0,1) \to B_{\mathbb{R}^n}(0,r) \subset B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$ è la moltiplicazione per r.

(c) Dimostrare che, se due embedding $f, g : \Delta^n \to M$ soddisfano $df_0 = dg_0$, allora f e g sono isotope.

(d) Dimostrare che, se $n < m$ e M è connessa, allora due embedding $f, g : \Delta^n \to M$ sono isotope.

(e) Dimostrare che, se $n = m$ e M è connessa, allora ci sono al più due classi di equivalenza di embeddings $f : \Delta^n \to M$.